جامعة غليزان
كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم التجارية

مطبوعة بيداغوجية بعنوان:

محاضرات وتمارين محلولة في مقياس نماذج التنبؤ

موجهة لطلبة السنة الثالثة علوم اقتصادية، تجارية وعلوم التسيير

من إعداد

د. رفافة عبد العزيز

السنة الجامعية:2023-2024

لمن توجه المطبوعة:

توجه المطبوعة الى طلبة السنة الثالثة التابعين لكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، الذين يدرسون مقياس نماذج التنبؤ خلال السداسي السادس من مرحلة التكوين. مع الاستفادة المهمة لطلبة السنة الأولى ماستر لنفس الكلية في دراسة مقياس الأساليب الكمية في التسويق.

هدف المقياس:

يهدف المقياس الى فهم الطالب لواقع الاشكالية الاقتصادية ميدانيا، مع اتقان صياغة الاشكالية في نموذج رياضي خطي، لإيجاد التقدير الأمثل للنموذج الذي تم اقتراحه، بهدف مساعدة متخذ القرار في الاختيار الصحيح من بين عدة خيارات وترشيد القرارات في المؤسسة.

متطلبات المقياس:

يتطلب دراسة مقياس نماذج التنبؤ الالمام بالمبادئ النظرية في الاقتصاد، لطرح الاشكالية بالطريقة الصحيحة، اضافة الى اتقان الطالب لأساسيات الرياضيات بصفة عامة، لاسيما العمليات الحسابية، الهندسة وخاصة الحساب المصفوفاتي. مع امكانية التفسير الاقتصادي لجميع البيانات الناتجة خلال عملية الحل.

الأدوات المساعدة:

بالإضافة لمقاييس الرياضيات، الإحصاء والاحتمالات يمكن الاستعانة بعدة برامج حاسوبية تساهم في تسهيل العمليات الحسابية واختصار الوقت. نذكر من بينها:

- برنامج ميكروسوفت ايكسل
- برنامج SPSS
- EVIEWS
- Minitab

الفهرس العام

الصفحة	المحتويات
	الفصل الأول: مدخل لنماذج التنبؤ
	مبادئ نظرية في نماذج التنبؤ
	صياغة نماذج التنبؤ
	الفصل الثاني: الاقتصاد القياسي
	مفهوم الاقتصاد القياسي
	أسس تطبيق الاقتصاد القياسي
	الفصل الثالث: تحليل الانحدار البسيط
	أسس تطبيق تحليل الانحدار البسيط
	تمارين محلولة في تحليل الانحدار البسيط
	الفصل الرابع: تحليل الانحدار المتعدد
	أسس تطبيق تحليل الانحدار المتعدد
	تمارين محلولة في تحليل الانحدار المتعدد
	الفصل الخامس: السلاسل الزمنية
	مفهوم السلاسل الزمنية
	أسس تطبيق السلاسل الزمنية
	تمارين محلولة في السلاسل الزمنية

قائمـــة المختصـــرات

Désignation complète en langue étrangère	التسمية باللغة العربية	المختصرات
B, C, D		
F, G, I		
L, M, N		
O, P, R		
S, T, U, V		

مقدمة:

غالبا نحتاج إلى التنبؤ بأحداث المستقبل وذلك لأن الخبرة بالماضي أكدت أن المعرفة المبكرة بالمستقبل يمكن أن توفر فرصة أفضل للاستعداد لهذه الأحداث المستقبلية، ومع التطور وتقدم خبرة الإنسان واستخدامه للأساليب الكمية المتقدمة أصبح التنبؤ أداة فعالة أكثر علمية ودقة في توقع الأحداث المستقبلية مما ساعد على زيادة استعداد الأفراد وكذلك الشركات للتغيرات المتوقعة في المجالات المختلفة ومنها التغيرات في السوق وحجم ونمط الطلب على المنتجات.

تعتبر نماذج التنبؤ أدوات قوية لاتخاذ القرارات الاستراتيجية والتخطيط للمستقبل. ومع ذلك، يجب أن يتم استخدامها بحذر وتقييمها بناءً على دقتها وموثوقيتها. قد تكون هناك عوامل غير متوقعة أو غير معروفة يمكن أن تؤثر على النتائج المتوقعة.

في هذه المطبوعة نشرح مبادئ مقياس نماذج التنبؤ، ونتعرف على المفاهيم الأساسية والأدوات المستخدمة في هذا المجال. لنتعلم كيفية تحليل البيانات واستخدام النماذج المناسبة لتوقع النتائج المستقبلية. سنتعرف أيضًا على أمثلة تطبيقية وتحليل النتائج وتقييم دقة التنبؤ. من المهم أن نكون قادرين على فهم وتطبيق نماذج التنبؤ في مجالك المحدد واستخدامها بشكل فعال لاتخاذ القرارات الاستراتيجية لاتخاذ قرارت صحيحة.

التنبؤ الاقتصادي economic forecasting عملية تقدير للتطور المستقبلي لقيم الظواهر الاقتصادية استنادا إلى الوضع الراهن وإلى العوامل المؤثرة في تطور تلك الظواهر. ويقدم التنبؤ بهذا المعنى تقديرات كمية ونوعية للظواهر والمؤشرات الاقتصادية في لحظة محددة أو لمدة زمنية أطول، ويعتمد التنبؤ الاقتصادي بصورة أساسية على السلاسل الزمنية time series من خلال دراسة تطور الظاهرة مع الزمن بوصفه عاملا يظهر حاصل تأثير جميع العوامل المؤثرة في هذه الظاهرة. فالظواهر تتغير مع الزمن من شهر إلى آخر ومن سنة إلى أخري، ولا يعد الزمن ذاته عاملا مؤثرا في تطور الظواهر الاقتصادية بصفته مؤشرا موضوعيا مستقلا عن فعل الإنسان. إلا أن الزمن ملازم لتطور الظواهر الاقتصادية ومن ثم يمكن الربط بين حالة الظاهرة واللحظة التي تقابل هذه الحالة، أو بين تطورات الظاهرة والمدة الزمنية التي جرت أو ستجري فيها تلك التطورات الناجمة عن عوامل أخرى غير الزمن تؤثر في الظاهرة وتؤدي إلى تغيرها كما ونوعا.
والسلسلة الزمنية هي سلسلة من القيم العددية لمؤشر إحصائي يعكس تغير الظاهرة بالنسبة إلى الزمن، وكل قيمة عددية في السلسلة تقابل لحظة زمنية أو مدة زمنية محددة. ويمكن أن تكون المدة أياما أو شهورا أو سنوات. وتنشأ سلسلة زمنية عن طريق مراقبة الظاهرة المدروسة مدة من الزمن وقياسها في مدد زمنية متساوية بهدف الحصول على قيمها.
والهدف من دراسة السلسلة الزمنية وتحليلها هو تعرف التغيرات التي طرأت على الظاهرة التي تمثلها في مدة من الزمن. ثم تحليل أسبابها ونتائجها وتحديد اتجاهها حتى يمكن استخدامها للتقدير والتنبؤ بالمستقبل. وتستخدم مؤشرات الزيادة المطلقة ومؤشرات الزيادة النسبية لتحديد مقدار تغير الظاهرة المدروسة واتجاهها وسرعتها. وهي نوعان سلاسل زمنية آنية وسلاسل زمنية مديدة.
ولأن الاتجاه العام للسلاسل الزمنية يعكس تغيرات أساسية طويلة الأمد وتأخذ شكلها بصورة تدريجية، وتستمر في اتجاه واحد مدة طويلة من الزمن فإنه يمكن استخدامها للتنبؤ بالمستقبل.

الفصل الأول: مدخل لنماذج التنبؤ

مفهوم نماذج التنبؤ:

نماذج التنبؤ هي أدوات تحليلية تستخدم لتوقع الأحداث المستقبلية بناءً على البيانات المتاحة. تستخدم هذه النماذج في مجموعة متنوعة من المجالات مثل التسويق والمالية والاقتصاد والعلوم الاجتماعية. حيث تعتمد نماذج التنبؤ على الفرضيات والمعطيات المتاحة لتحليل البيانات واستنتاج الاتجاهات المستقبلية. لتضمن استخدام الإحصاءات والرياضيات والتحليل الكمي لتحليل البيانات وتوقع النتائج. فقد تشمل بعض الأمثلة الشائعة لنماذج التنبؤ:

1. نماذج الاقتصاد القياسي: تستخدم لتحليل التأثير بين ظاهرتين اقتصاديتين أو أكثر لتوقع القيم المستقبلية.
2. نماذج السلاسل الزمنية: تستخدم لتحليل البيانات التي تتغير مع مرور الوقت وتوقع قيمها في المستقبل.
3. نماذج الشبكات العصبية: تستخدم لتحليل البيانات المعقدة وتوقع النتائج بناءً على الأنماط والترابطات المكتشفة.
4. نماذج الاحتمالات: تستخدم لتحليل البيانات المحتملة والتوقع في حالة عدم التأكد.

أساليب التنبؤ:

لقد تطورت وتنوعت أساليب وطرق التنبؤ بشكل كبير مما جعل اختيار الأسلوب الملائم مسألة صعبة تتطلب خبرة ودراية بهذه الأساليب واستخدامها وذلك لأن لكل أسلوب من أساليب التنبؤ ظروف أفضل للاستخدام والتكيف ليعطي نتائج أكثر دقة في التنبؤ، ويمكن تصنيف أساليب التنبؤ إلى مجموعتين: الأساليب النوعية والأساليب الكمية،

أولاً: الأساليب النوعية (Qualitative Methods)

وهي الأساليب التي تعتمد في التنبؤ على الحس الذاتي والخبرة والتقدير الإداري، وبسبب تباين مستويات الخبرة فإن مديرين قد يصلان إلى تنبؤين مختلفين، ورغم تطور الأساليب الكمية فإن الأساليب النوعية لا زالت مهمة في بعض الحالات كما في ظروف التغيرات السريعة والكبيرة وعندما لا يمكن التعويل على البيانات الماضية كمؤشرات للتنبؤ بالأحداث المستقبلية أو عندما لا تتوفر مثل هذه البيانات كما في المنتجات الجديدة.

آراء وتقديرات المديرين:

وفي هذه الطريقة يتم أخذ آراء وتقديرات مديري الإنتاج، التسويق، المالية...الخ والاعتماد عليها كأساس في التنبؤ على افتراض أن هؤلاء المديرين يتمتعون بالخبرة الماضية عن إنتاج ومبيعات(الطلب) المنتج، وهذه

الطريقة يمكن أن تستخدم في التخطيط طويل الأمد وتطوير منتج جديد، وهي بسيطة وغير مكلفة وتستعين بخبرة المديرين في ضوء ظروف الشركة، ومن عيوب هذه الطريقة سيادة الرأي الواحد على بقية آراء الأفراد الآخرين. ويوضح المثال التالي كيفية معالجة تقديرات هؤلاء المديرين للطلب المتوقع.

تقديرات مندوبي المبيعات:

إن العاملين في المبيعات يمثلون مصدراً مهماً للمعلومات لأنهم على اتصال مباشر بالسوق والزبائن، لهذا يمكن استطلاع آرائهم والاستفادة من تقديراتهم لما هو متوقع من الطلب في الفترة القادمة.

تتميز هذه الطريقة بأنها واقعية وعملية لأنها نابعة من واقع وظروف السوق ولكنها تعاب بالتالي:

- تحيز مندوبي البيع وعدم موضوعيتهم في وضع تصورات عن حجم المبيعات المتوقعة، حيث يميلون إلى تخفيض الأرقام كي يستطيعوا تحقيقها بسهولة ونيل المكافآت والعمولات.
- جهل مندوبي المبيعات بالظروف الاقتصادية والسياسية العامة وكذلك العوامل الأخرى التي تؤثر على حجم المبيعات .

مسوحات الزبائن وبحوث السوق:

إن الزبون هو الذي يحدد الطلب لهذا فإن استطلاع آراء الزبائن يمكن أن يمثل مصدراً مهماً للمعلومات حول الطلب المتوقع. ومن عيوب هذه الطريقة تحيز الزبون ففي حالة الرغبة بالمنتج يعطي تقديراً عالياً لطلبه وفي حالة عدم الرغبة يعطي تقديراً منخفضاً, ومن عيوبه أيضاً ضعف استجابة الزبائن لهذه المسوح، وكلفة المسوح العالية، والحاجة إلى مهارات لإعداد وتنفيذ المسوح وبحوث السوق.

طريقة دلفي:

لقد تم تطوير طريقة دلفي (Delphi Method) في عام 1964 من قبل مؤسسة البحث والتطوير الأمريكية المعروفة بمؤسسة راند (Rand Corporation)، وقد استخدمت لأول مرة في التنبؤ التكنولوجي حيث شارك عدد من المختصين في العلوم المختلفة ليحددوا التطورات التكنولوجية المتوقعة في المدى البعيد.

وتعرف تقنية دلفي بأنها عملية جماعية تسمح للخبراء الذين يمكن أن يتواجدوا في مناطق جغرافية مختلفة بالقيام بعملية التنبؤ، وهناك ثلاث أنواع للمشاركين في تقنية دلفي هم:

1- متخذو القرار
2- طاقم الموظفين
3- المستجيبون

تتكون مجموعة متخذي القرار Decision Makers من مجموعة من الخبراء الذين سيقومون باتخاذ قرارات على أساس نتائج التنبؤ، وهي عادة ما تتضمن 5-10 أعضاء, أما أفراد طاقم الموظفين Staff Personnel فيقومون بتحضير وتوزيع وجمع وتلخيص الاستبيانات ونتائج المسح الإحصائي، أما المستجيبون Respondents فهم مجموعة من الأفراد يتميزون بخبرتهم قيمة ومطلوبة.

أما أسلوب عمل طريقة دلفي فهو:

1- اختيار مجموعات طاقم الموظفين والمستجيبين

2- تحضير وإدارة الاستبيان رقم1
3- تحليل الاستبيان رقم 1
4- تحضير وإدارة الاستبيان رقم 2
5- تحليل الاستبيان رقم 2
6- عمل تحليل نهائي وتقديم النتائج.
7- القيام بالتنبؤ.

إن الفكرة الأساسية لطريقة دلفي هي عملية التغذية المرتدة، فنتيجة الاستبيان الأول ترتب وتعاد إلى المستجيبين مع الاستبيان الثاني المعتمد على نتائج وتصورات الاستبيان الأول.

يمكن تعديل طريقة دلفي لتفي باحتياجات تنبؤ معينة، ففي بعض الحالات يمكن استخدام ثلاثة أو أربعة استبيانات.

وقد طبقت لاحقاً دلفي في مجالات أخرى خاصة تلك المتعلقة بقضايا السياسة العامة مثل الاتجاهات الاقتصادية والصحة والتعليم، كما أنها طبقت بنجاح وبدقة عالية في مجالات الأعمال، فقد بينت إحدى الدراسات أن دقتها وصلت إلى 97-96 % بمقارنة المبيعات المتوقعة بالفعلية بينما كانت دقة الأساليب الكمية للتنبؤ بحدود 85-90%.

وثمة عيوب في طريقة دلفي أهمها: الحاجة إلى لجنة ذات تأهيل وتدريب للإشراف على الطريقة، الخبراء قد لا يكونوا حقاً خبراء، تغير الخبراء من جلسة لأخرى، الكلفة العالية، والوقت الطويل.

تحليل السيناريو:

تحليل السيناريو (Scenario) أسلوب آخر يتزايد استخدامه في التنبؤ وخاصة في التنبؤ المتوسط والطويل الأمد المتعلق باستقراء الاتجاهات.

ويمكن تعريف السيناريو بأنه وصف كتابي للأوضاع أو الأحداث أو المتغيرات الرئيسية في المستقبل بالاعتماد على خبرة الشركة وافتراضاتها الأكثر ترجيحاً لما سيحدث في المستقبل، ولقد وضعت شركة جنرال إلكتريك الأمريكية نموذجاً معقداً لإعداد سيناريو عما تتوقعه الشركة ، والمراحل الأساسية لإعداد هذا النموذج هي:

أولاً: إعداد الخلفية: ويتضمن تقييم العوامل الأساسية في القطاع الذي تعمل فيه الشركة وكذلك في المجتمع كالسكان ونمط الحياة، التشريعات ، العوامل العلمية والتكنولوجية، الاقتصاد...الخ.

ثانياً: اختيار المؤشرات المهمة: تحديد المؤشرات المهمة في ضوء نتائج دراسة الخطوة السابقة، واختيار فريق من الخبراء لتقييم المؤشرات المهمة والأحداث المستقبلية المتوقعة ومستقبل الصناعة التي تعمل فيها الشركة.

ثالثاً: تحديد السلوك الماضي لكل مؤشر: وذلك بتحديد السلوك التاريخي لكل مؤشر، واستخدام الحاسوب للاستفادة من برامج الشركة الخاصة بتحليل تأثير الاتجاه، وأخيراً تحديد أسباب السلوك الماضي لكل اتجاه سواء كانت سكانية ، اجتماعية، اقتصادية، سياسية، تشريعية...الخ.

رابعاً: تثبيت احتمال الأحداث المستقبلية: مناقشة فريق الخبراء حول قيم الاتجاهات السابقة، وقيم التأثير المحتمل للأحداث المستقبلية، وقيم احتمال حدوثها..الخ.

خامساً : التنبؤ بكل مؤشر: تشغيل برنامج تحليل تأثير الاتجاه واستخدام مصفوفة تحليل التأثير التبادلي للأحداث المستقبلية على المؤشرات المهمة وبما يساعد على استخلاص النتائج.

سادساً: كتابة السيناريو: وهي مرحلة استخلاص النتائج وإعداد الوصف الكتابي الملخص لها.

ولابد من أن نشير إلى أن هذا النموذج المعقد يمكن تبسيطه حسب حجم الشركة ودرجة تعقد ظروفها الداخلية والخارجية، كما يمكن إعداد السيناريو المتعلق بأحد المؤشرات أو العوامل في سلوك أحد المنافسين أو تطوير المنتجات في مجال عمل الشركة أو ارتفاع كلفة المواد أو الأسعار مما يعني أن السيناريو أسلوب مرن قابل للاستخدام حسب أغراض الشركة وحاجاتها.

ثانياً: الأساليب الكمية: (Quantitative Methods):

وهي التي تستخدم الطرق البيانية والإحصائية والرياضية للوصول إلى التنبؤات التي عادة ما تكون أكثر دقة وأقل تحيزاً بالمقارنة مع الأساليب النوعية وذلك لأنها تعتمد على سلسلة زمنية من البيانات في تحديد نمط الطلب وإسقاطها على المستقبل من أجل التنبؤ، ونعرض فيما يلي بعض هذه الأساليب:

1- **الاقتصاد القياسي:** يدرس العلاقة والتأثير بين مختلف الظواهر الاقتصادية أو الاجتماعية، ويركز على أسلوب تحليل الانحدار، فاما يكون بسيطا في حالة دراسة متغيرين فقط، أو يكون متعددا عندما ندرس أكثر من متغير. كما يختلف نوع الانحدار من خطي أو غير الخطي.

2- **السلاسل الزمنية:** يتم من خلالها دراسة تطور الظواهر الاقتصادية عبرسلسلة زمنية محددة، فيكون النموذج المقدر بدلالة الزمن.

الفصل الثاني: الاقتصاد القياسي

كلمة الاقتصاد القياسي تعني حرفيا القياس في الاقتصاد، هذا المعنى واسع يشمل العديد من المفاهيم الاقتصادية والتي تعتمد في الغالب على القياسات حيث اغلب الاقتصاديون يهتمون بعملية القياس مثلا عندما يتم قياس الناتج المحلي، البطالة، عرض النقود، الصادرات، الواردات، ..الخ.

ماذا نقصد بالاقتصاد القياسي؟

هو تطبيق الطرق الرياضية والاحصائيه لتحليل البيانات الاقتصادية بهدف إعطاء محتوى رقمي للنظريات الاقتصادية للتأكد من صحة تلك النظريات.

من هذا التعريف نستطيع أن نفرق بين الاقتصاد الرياضي والاقتصاد القياسي، حيث يعتمد الاقتصاد الرياضي على تطبيق النظريات الرياضية فقط. والنظريات المشتقة لا تستلزم بالضرورة على بيانات رقميه.

البداية الحقيقية للاقتصاد القياسي هي مع تأسيس جمعية الاقتصاد لقياسيEconometric Society في عام 1930 ودورية اكنومتريكاEconometrica Journal في يناير 1933.

النماذج الاقتصادية والقياسية:

المهمة الأولى للاقتصاد القياسي هي تكوين النموذج القياسي. ما هو النموذج القياسي؟

النموذج Model هو تمثيل مبسط للواقع الحقيقي. على سبيل المثال نقول إن الكميه المطلوبة من البرتقال تعتمد على سعر البرتقال هذه تعتبر تبسيط للواقع لان هناك العديد من العوامل المؤثرة على قرار شراء البرتقال على سبيل المثال الدخل، نوعية الغذاء ، الذوق، ...سعر التفاح... الخ من الأسباب التي قد تؤثر على قرار شراء كميه من البرتقال.

العديد من العلماء نادوا بعملية التبسيط لأن النماذج المبسطة تمثل وسيله ابسط لفهم الواقع ولتوصيل المعلومة وكذلك أسهل في عملية اختبار النظرية والتأكد من صحتها. مثل كارل بوبر Karl Popper و ميلتون فريمانMilton Friedman . أن اختيار نموذج مبسط لشرح العالم الحقيقي يؤدي إلى الانتقاد ين التاليين:

1- النموذج يكون مبسط جدا.

2- الافتراضات غير واقعية.

على سبيل المثال، الطلب على البرتقال، ببناء نموذج الطلب على البرتقال يعتمد فقط على السعر هو تبسيط للواقع، وغير واقعي. للرد على انتقاد التبسيط نستطيع إن نقول انه من الأفضل البدأ بنموذج مبسط ثم بناء نموذج اكثر تعقيدا. هذه الفكرة عبر عنها كوبمان. وفي الجانب الأخر هناك من يقول انه الأفضل الابتداء بنموذج عام وتبسيطه حسب البيانات الموجودة مثل سرجان Sargan و ديفيد هنريDavid Hendry

أما من ناحية الافتراضات غير واقعية فهذا يسري على معظم النظريات حيث يقول فريمان إن الافتراضات لأي نظريه لا تتسم بالواقعية يقول:-

> السؤال المهم عن الافتراضات ليس ما إذا كانت تصور صورة واقعية بل هو فإذا كانت تعطي صوره تقريبية كافيه للغرض المطلوب. وهذا السؤال يمكن ألا جابه عنه برؤية ما إذا كانت النظرية تعمل أي هل تعطي تنبؤات صحيحه؟.

بالعودة إلي مثالنا السابق، الطلب على البرتقال، إذا قلنا انه فقط يعتمد على سعر البرتقال هذا افتراض وصفي غير واقعي. ولكن، إذا أضفنا المتغيرات الأخرى. مثل الدخل وسعر التفاح فان هذا لا يضيف واقعية إلي النموذج. حتى هذا النموذج ممكن القول انه لا يتسم بالواقعية وذلك لأن هناك متغيرات أخرى لم يتضمنها النموذج. ولكن مسألة آي من النماذج يكون اكثر فائدة في التنبؤ بالطلب على البرتقال هذا يعتمد على البيانات المتوفرة والبيانات التي يمكن الحصول عليها.

عمليا، يتضمن النموذج جميع المتغيرات التي تعتبر مهمة في تحديد النموذج ونترك المتغيرات في المتغير العشوائي. هذا ما يفرق بين النموذج الاقتصادي والنموذج القياسي.
النموذج الاقتصادي هو مجموعه من الافتراضات التي تصف بالتقريب سلوك اقتصاد معين أو جزء منه.
النموذج القياسي يتكون مما يلي:

1 - مجموعه من المعادلات السلوكية المشتقة من نموذج اقتصادي. هذه المعادلات تتضمن بعض المتغيرات و متغير عشوائي والذي يتضمن جميع المتغيرات والتي تعتبر غير رئيسيه في وصف الغرض المطلوب للنموذج

2 يفيد ما إذا كان هناك خطأ في المشاهدات المتحصل عليها.

3 - تحديد توزيع الاحتمالات للمتغير العشوائي.

بهذه المحددات نستطيع أن نواصل اختبار صحة النموذج الاقتصادي ويستخدم للتبوء أو تحليل سياسة اقتصادية معينه.

مثال: دالة الطلب، النموذج القياسي كما يلي:-

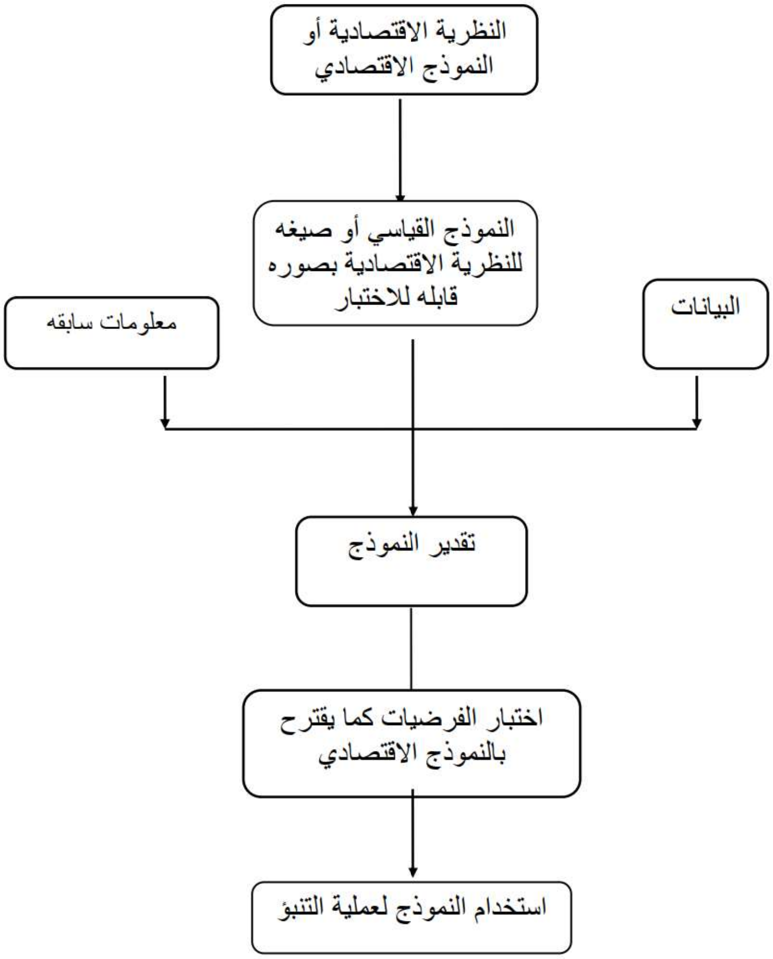
1- المعادلة السلوكية $Q = \alpha + \beta P + u$

حيث Q الكميه المطلوبة، وP السعر. حيث تمثل المتغيرات المشاهدة و u متغير عشوائي. و β و α معالم النموذج.

2 - تحديد التوزيع الاحتمالي للعشوائي حيث يعبر عنه بما يلي:- $E(u) = 0$ وقيم المشاهدات المختلفة مستقله وموزعه توزيع طبيعي بوسط = الصفر وتباين σ^2

بهذه المحددات يمكن مواصلة اختبار قانون الطلب. وكذلك يمكن استخدام الدالة للتنبوء بأي تغير في السعر.

شـــــــــكل 1.1: الخطوات التي يجب إتباعها في تحليل القياسي لنموذج اقتصادي:



الهدف وطريقة الاقتصاد القياسي:

الهدف من الاقتصاد القياسي:

1. بناء نموذج قياسي، أي بناء نموذج اقتصادي مبني على الملاحظة بشكل يمكن اختباره. هناك العديد من الطرق لبناء النموذج القياسي من النموذج الاقتصادي لأننا يجب أن نختار الشكل المناسب، تحديد البناء العشوائي للمتغيرات، وهكذا. هذا يكون الجزء التحديدي من العمل القياسي.
2. تقدير واختبار هذه النماذج باستخدام البيانات المشاهدة.
3. استخدام تلك النماذج للتنبوء و لأغراض التحليل.

خلال الخمسينات والسينات كان القياسي يقوم على الاستنتاج Inference و لكن تحديد النموذج لم يؤخذ في الاعتبار كثيرا. كان الاهتمام موجه للتقدير الإحصائي لنموذج قياسي محدد. خلال الأربعينات قامت مؤسسة Cowles بتقدم كبير في هذا المضمار.

ولكن التحليل الإحصائي مثل عقبه كبيرة. لذلك انحصر الوضع في طرق تقدير مختلفة في الخمسينات والستينات.

لم يتم توجيه الاهتمام لخطأ في التحديد. ولكن مع التقدم في التقنية واستخدام أجهزة الحاسب الآلي السريعة. بدأ تطوير في الأساليب القياسية حيث وجه الاهتمام إلى مجالات أخرى في التحليل.

نستطيع أن نرتب خطوات التحليل القياسي, كما يتضح في الشكل 1 .

هذا التنظيم واجه بعض الانتقادات في السبعينات، بعض هذه الانتقادات يمكن تلخيصها بما يلي:

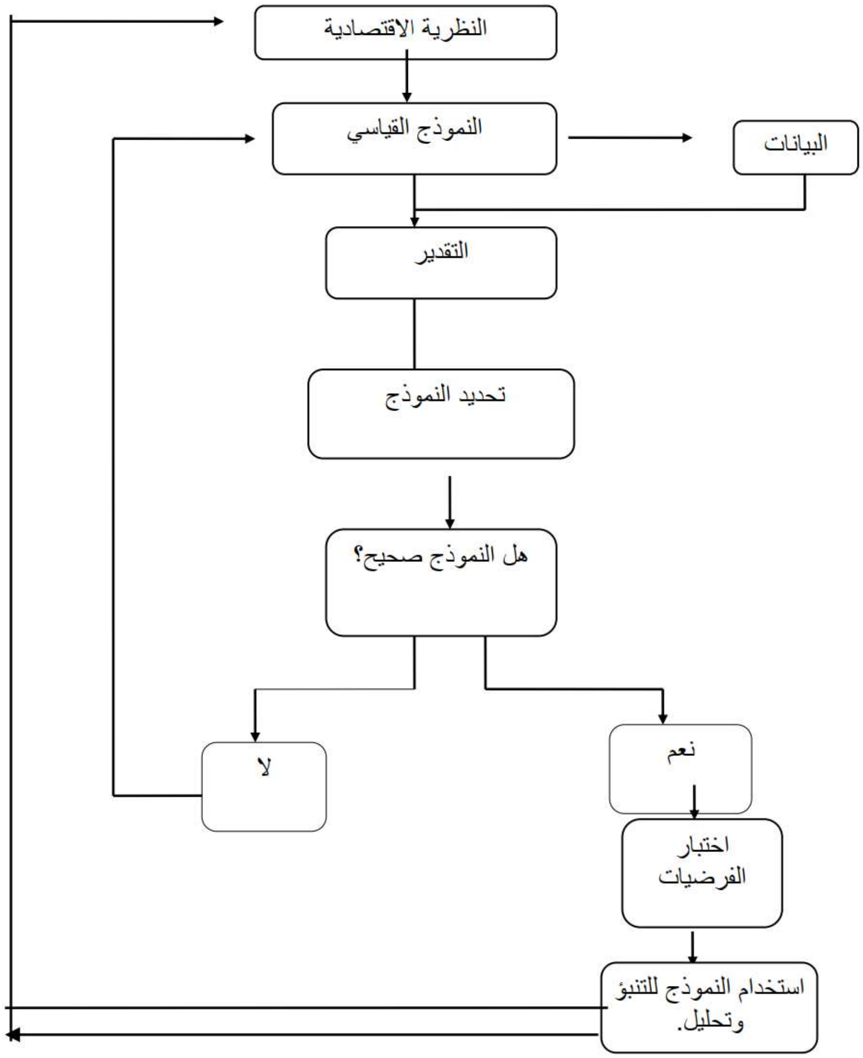
1- لا يوجد استرجاع من الاختبار القياسي للنظرية الاقتصادية، وكذلك لا يوجد نتائج للاختبار يمكن على ضوئها تقييم النظرية الاقتصادية.
2- البيانات يجب أن يكون لها تأثير على النموذج.
3- اختبار الفرضيات لا يجب أن يرتبط بما تقترحه النظرية فقط. بل يجب اختبار ملائمة التحديد السابق. لذلك يجب إضافة فحص جديد لاختبار ملائمة وتحديد النموذج.

التطوير الجديد المقترح كما يلي في الشكل 2.1 سوف نتعامل مع نقطة 3 والتي تمثل التطور الذي تم في الاقتصاد القياسي في فصل قادم.

التطور الذي نلاحظه على شكل 2.1 هو:-

1-من النتائج القياسية إلى النظرية الاقتصادية.
2- من تحديد النموذج إلى فحص وتقييم النموذج الاقتصادي.
3- من النموذج القياسي إلى البيانات**.**

شــــــكل 2.1 : الخطوات التي يتم إتباعها في تحليل القياسي لنموذج اقتصادي:



مما يتكون اختبار النظرية الاقتصادية؟

1- الهدف الأساسي للاقتصاد القياسي هو اختبار النظرية الاقتصادية. من المؤشر لنجاح النظرية الاقتصادية توافق إشارة المعاملات المقدرة للنموذج القياسي. والاختبار الأكثر أهميه ماذا كان يعطى تنبؤ اكثر دقه من النظريات الاقتصادية التي تم اقتراحها مسبقا. أي انه يستلزم من الباحث مقارنة النموذج الحالي مع النماذج السابقة.

الفصل الثالث: الانحدار الخطي البسيط:

بالعودة إلى الرموز التي استخدمناها حيث رمزنا للمتغير المفسَر بـ y والمتغيرات المفسرة بـ x_3 x_2 $x_n....x_1$. إذا كانت $k=1$ ، أي إن هناك متغير مستقل واحد فقط من المتغيرات المفسرة. أي ان هناك x واحدة فقط. يعرف هذا بالانحدار البسيط. وهو ما سوف يتم مناقشته في هذا الفصل. إذا كانت $k>2$ ، آي أن هناك اكثر من x واحد و متغير مستقل. نحصل على ما يعرف بالانحدار المتعدد. والذي سوف نناقشه في الفصل القادم.

مثال 1 : الانحدار البسـيط.
y = المبيعات
x = النفقات الاعلانيه.

حيث يتم تحديد العلاقة بين المبيعات والنفقات الأعلانيه.

مثال 2: الانحدار المتعدد.
Y = استهلاك الأسرة.
X_1 = دخل الأسرة.
X_2 = الأصول المالية للأسرة
X_3 = حجم الأسرة

تحديد العلاقة بين نفقات استهلاك الأسرة من جهة والدخل، والأصول المالية و حجم الأسرة من جهة اخرى.

1- في المثال الأول نستطيع أن نحلل تأثير النفقات الاعلانيه على كمية المبيعات.

2- التنبؤ بقيم Y من قيم X.

3- اختبار مدى معنوية العلاقة بين آي من X و Y.

في مناقشتنا نفرق بين المتغيرY و المتغيرات X. افترضنا أن المتغيرات X هي المتغير الذي يؤثر على المتغير Y.

جدول 3: مصطلحات المتغير التابع و المتغير المستقل.

X	Y
1-مَتنبأ	متَنبأ به
2-مفَسِر	مفَسَر
3-مستقل	تابع

الخط الذي يمثل العلاقة هو العلاقة التحديديه . ولكن القيم الحقيقية لـ Y تمثل الخط العمودي وتسمى العلاقة بين X ,Y علاقة عشوائية.

بالرجوع إلى المعادلة التي تمثل الدالة.نستطيع القول إن الدالـة تمثـل الخط $f(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_t$

بينما العلاقة العشوائية هي $f(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_t + u$

حيث تمثل u الخطأ العشوائي. وتمثل $\alpha\ \beta$ معاملات الانحدار.

يتم إضافة الخطأ العشوائي للمعادلة ;

1- يمثل عنصر العشوائية في استجابة الإنسان مثل اختلاف النفقات الاستهلاكية من فرد لأخر مع العلم انهم قد يتساووا في الدخل.

2- تأثير عوامل أخرى محذوفة مثل العادات حجم الاسره وغيرها من العوامل.

3- خطأ في قياس المتغير التابع.

الهدف هو الحصول على تقدير للمعاملات الغير معروفه $\hat{a}_0 \cdot \hat{a}_1$ للقيام بعملية التقدير يجب افتراض بعض الافتراضات.

الافتراضات الخاصة بالخطأ العشوائي:

1- الوسط الصفري.$E(u)=0$

-أن وســـط التوزيع الاحتمالي الخاص بالمتغير العشوائي = الصفر. إي أن قيم u تتمركز حول الصفر.

2- تساوي التباين $V(u) = \sigma^2$.

تباين التوزيع الاحتمالي الخاص بالعناصر العشوائية u يساوي قيمه ثابتة وموجبة.

3- استقلالية الخطأ العشوائي: أي أن التغاير، درجة الارتباط بين قيم العشوائي = الصفر

أي انها مستقلة عن بعضها. $COV(u_i, u_j) = 0$

4- التوزيع الطبيعي للخطأ العشوائي. $u_i \sim N$

تمثل هذه الافتراضات بالتالي $u_i \sim N(0, \sigma^2)$

تقدير نموذج الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى:

في المرحلـة الأولـى نفترض وجود الفروض الاساسيه لمعالجـة النمـوذج الخطـي. وفـي المراحـل اللاحقـة نتعرض للحالات التي تكون فيها هذه الفروض غير صحيحه.

نموذج الانحدار بالافتراضات الأساسية كما يلي:

$$\hat{Y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_t + u$$

<u>**طريقة المربعات الصغرى**</u>

تعتمد طريقة المربعات الصغرى العادية على الحصول على مقدرات , الانحدار حيث تمثل α معلمة القاطع، $\hat{a}_1$, معلمة الميل. بحيث يتم تصغير مجموع مربعات البوا قي إلى آدني قيمه لها. بحيث يجري تعريف مكون يطلق علية مجموع المربعات البوا قي وبعد ذلك يشرع في الحصول على $\hat{a}_0 \cdot \hat{a}_1$ بحيث يتم تصغير هذا المكون إلى أدنى قيمه له.

طريقة المربعات الصغرى تعطينا مقدرات الانحدار $\hat{a}_0 \cdot \hat{a}_1$ ولكن لا تعطينا مقدرة التباين وهذا يعتبر من نقاط ضعف طريقة المربعات الصغرى.

<u>المعيار الخاص في المربعات الصغرى العادية</u>: النموذج المقدر هو كما يلي

$$\hat{Y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_t + u$$

u هي البوا قي والتي تساوي من النموذج $u = \hat{Y}_t - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_t)$ نموذج الانحدار ممكن أن يمر من خلال انتشـــار البيانات الخاصة بـ X ,Y، الخط المقدر هنا هو الذي يعطي Y المقدرة

$$\hat{Y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_t$$

إذا أخذنا إحداثيات القيم Y,X إحداثيات النقطة الأولى تنقسم إلى قسمين، قسم من المحور الأفقي في النموذج المقدر، هذا عبارة عن $\hat{Y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_t$ الجزء الثاني عبارة عن قيمة البوا قي.

فالمشاهدة Y هي حصيلة جمع $u + \hat{Y}_t = (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_t)$ أي أن أي مشاهده مكونه من جانبين، جانب الخط المقدر والبواقي. البواقي بحكم أنها مقدرة العنصر العشوائي يمكن أن تكون موجبة وممكن أن تكون سالبه وكذلك من الناحية النظرية يمكن أن تساوي الصفر.

للحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية يجب أن نحصل أولا على البواقي:

$$u^2 = (\hat{Y}_t - (a_0 + a_1 X_t))^2$$

مجموع مربعات البواقي $\sum u^2=$

$$\sum u^2 = \sum(\hat{Y}_t - (a_0 + a_1 X_t))^2$$

يتم التوصل إلى الخط الذي تكون فيه مجموع مربعات البواقي اصغر ما يمكن [اختيار الخط الذي يدني مجموع مربعات البواقي إلى أصغر ما يمكن]. باستخدام الرياضيات فأن شرط الدرجة الأولى يتطلب أجراء التفاضل بالنسبة للمجاهيل $\hat{a}_0 \cdot \hat{a}_1$ نستخدم التفاضل الجزئي وبعد ذلك نساوي المعادلات التي تم أل تحصل عليها بالصفر ثم نطبق المعادلات الآنية للحصول على قيم المقدرات. ..

ونستطيع استخراج قيم $\hat{a}_0 \cdot \hat{a}_1$ منها

بالتعويض نحصل على

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})^2} = \frac{n\sum_{t=1}^{n} X_t Y_t - \sum_{t=1}^{n} X_t \sum_{t=1}^{n} Y_t}{n\sum_{t=1}^{n} X_t^2 - (\sum_{t=1}^{n} X_t)^2}$$

<u>مثال (1)</u>

X	Y	X^2	x	y	XY	xy	x^2
2	4	4	-2	-4	8	8	4
3	7	9	-1	-1	21	1	1
1	3	1	-3	-5	3	15	9
5	9	25	1	1	45	1	1
9	17	81	5	9	153	45	25
∑X= 20	**∑Y= 40**	**$\sum X^2$= 120**			**∑XY= 230**	**∑xy=70**	**$\sum x^2$=40**

لنجد:

$$a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X\right)^2} =$$

$$\hat{a}_1 = \frac{(5)(230)-(20)(40)}{5(120)-(20)^2} = 1.75$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{a}_1 \bar{X} = 8 - 1.75(4) = 1$$

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{a}_1 X =$$

$$\hat{Y} = 1 + 1.75X$$

باستخدام الانحرافات $\hat{a}_1 = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{70}{40} = 1.75$

خصائص مقدرات المربعات الصغرى العادية (م ص ع)

الخصائص الإحصائي التي تتميز فيها مقدرات المربعات الصغرى العادية.

تتميز المقدرات $\hat{a}_0 \cdot \hat{a}_1$ بثلاث خواص أساسيه:

1) الخطية 2)عدم التحيز 3) الكفاءة

1) الخطية: $\hat{a}_0 \cdot \hat{a}_1$ تعتبر داله خطية للعنصر العشوائي التابع Y . أهمية هذه الخاصية أنها تعطينا درجه من البساطة في أجراء الحسابات حيث انه لحساب $\hat{a}_0 \cdot \hat{a}_1$ نستعمل المتغير التابع في صوره خطيه فقط هذه لتبسيط الحسابات.

2) عدم التحيز: مقدرات (م ص ع) $\hat{a}_0 \cdot \hat{a}_1$ مقدرة غير متحيزة للمعلمات $a_0 \cdot a_1$. عدم التحيز يتطلب بأن القيمه المتوقعة لـ $\hat{a}_0 \cdot \hat{a}_1$ و التي هي قيمة المعلومة الحقيقية بمعنى آخر متوسط $\hat{a}_0 \cdot \hat{a}_1$ = $a_0 \cdot a_1$. إذا جمعت عينات كثيرة وفي كل عينه نحسب $a_0 \cdot a_1$ يتم أخذ المتوسط. ذلك المتوسط نظريا يجب أن يتساوى مع المعلمة الحقيقية. $a_1 = \hat{a}_1$

تباين المقدرات:

حيث أن تباين اي قيمة تتوزع حول وسط معين هو معدل تشتت هذه القيم عن الوسط

ويكون القانون الخاص بتباين مقدرة القاطع:

$$V(\hat{a}_0) = E\{\hat{a}_0 - E(\hat{a}_0)\}^2$$

بإجراء بعض الخطوات يمكن إن نبرهن إن تباين $\hat{a}_0$ يساوي

$$V(\hat{a}_0) = \frac{\sigma^2 \sum X^2}{n\sum x^2}$$

من المعادلة نلاحظ إن تباين $\hat{a}_0$ تعتمد على تباين u فإذا زاد تباين u توقع زيادة تباين $\hat{a}_0$ لان هناك علاقة طرديه بين تباين $\hat{a}_0$ وتباين u . وتوجد صيغه أخرى لتباين $\hat{a}_0$ على ان الانحراف المعياري يساوي :

$$\sigma_{\hat{a}_0} = \sqrt{\frac{\sum u_t^2}{(n-k)}\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum(X_t - \overline{X})^2}\right)}$$

اما القانون الخاص بتباين $\hat{a}_1$:

$$V(\hat{a}_1) = \{\hat{a}_1 - E(\hat{a}_1)\}^2$$

يمكن إن نثبت ان الانحراف المعياري الخاص بـ $\hat{a}_1$ يساوي

$$\sigma_{\hat{a}_1} = \sqrt{\frac{\sum(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{(n-k)\sum(X_t - \overline{X})^2}} = \sqrt{\frac{\sum u_t^2}{(n-k)\sum(X_t - \overline{X})^2}}$$

ومن المعادلة نلاحظ إن تباين $\hat{a}_1$ يعتمد طرديا على تباين u وعكسيا على مجموع مربعات انحرافات المتغير المستقل، فكلما ازدادت درجة انتشار المتغير المستقل (آي بيانات X مختلفة كثيرا عن بعضها) نتوقع إن يزيد المكون الموجود في المقام وبالتالي ينخفض تباين $\hat{a}_1$ مما يشعر إلى دقة التقديرات.

اما القانون الخاص بتباين الخطأ العشوائي : $\sigma^2 = \frac{\sum u^2}{n-k}$

3- آدني تباين:

الخاصية الثالثة لمقدرات م ص ع تمتلك آدني تباين هذه الخاصية لها أهمية بالغة في الاقتصاد القياسي لان آدني تباين يعتبر مؤشر إلى دقة القياسات، آدني تباين يعتبر مؤشر إلى دقة القياسات، آدني تباين يعني أعلى دقة من ناحية القياسات.

من النتائج التي توصلنا أليها عن مقدرات م ص ع يمكن أن نقول أن شكل التوزيع الاحتمالي الخاص بالمقدرات $\hat{a}_0$ و $\hat{a}_1$

$$\hat{a}_0 \sim N\left[a_0, \sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum x^2}\right)\right], \quad \hat{a}_1 \sim N\left[a_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right]$$

من المعادلتين يتبين انه :

1- كلما زاد التباين σ^2 كلما زاد تباين المقدرات $\hat{a}_0$ و $\hat{a}_1$

2-كلما كان انتشار قيم X اكبر كلما قل تباين $\hat{a}_0$ و $\hat{a}_1$

مثال (2):

البيانات التالية عن السعر وكميه البرتقال الذي تم بيعه في أحد أسواق الخضار في مدة 12 يوم إذا رمزنا للسعر بـ X والكميه بـY

باستخدام المعادلة التالية:

$$Y = a_0 + a_1 X + u$$

$$\bar{X} = 70, \sum xy = -35550$$

$$\bar{Y} = 100, \quad \sum x^2 = 2250$$

$$\hat{a}_1 = \frac{-3550}{2250} = -1.578$$

$$\hat{a}_0 = 100 - (-1.578)70 = 210.460X + u$$
$$\hat{Y} = 210.46 - 1.578X.$$

$$V(\dot{a}_0) = \sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x^2}) = \sigma^2(\frac{1}{12} + \frac{(70)^2}{2250}) = 2.2611\sigma^2$$

$$V(\dot{a}_1) = a_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sigma^2}{2250} = 0.00044\sigma^2$$

<u>تقدير التبـاين</u>σ^2 <u>:</u>حيث أن σ^2 مجهولـة والتـي نحتاجهـا لنـتمكن مـن حسـاب تبـاين

$\hat{a}_1$ نستخدم مقدرة σ^2 = مجموع مربعات البواقي/درجة الحرية

$$\sigma^2 = \frac{\sum u^2}{n-2} \qquad 7.2$$

بحساب مربعات مجموع البواقي من قيمة $\sum u^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = 698$

إذا مقدرة التباين $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum u^2}{n-2} = \frac{698}{12-2} = 69.8$

ومنها يمكن الحصول على مقدرات تباين $\dot{a}_0$ $\dot{a}_1$.

$$V(\dot{a}_0) = \sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x^2}) = 69.8(\frac{1}{12} + \frac{(70)^2}{2250}) = 157.82$$

$$V(\dot{a}_1) = a_1 \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{69.8}{2250} = 0.0310$$

مثال 3

X	Y	X²	x	y	XY	xy	x²	Y^	u	u²
2	4	4	-2	-4	8	8	4	4.5	0.50	0.2500
3	7	9	-1	-1	21	1	1	6.25	0.75	0.5625
1	3	1	-3	-5	3	15	9	2.75	0.25	0.0625
5	9	25	1	1	45	1	1	9.75	0.75	0.5625
9	17	81	5	9	153	45	25	16.75	0.25	0.0625
$\sum X=20$	$\sum Y=40$	$\sum X^2=120$			$\sum XY=230$	$\sum xy=70$	$\sum x^2=40$			$\sum u^2=1.5$

$$u = Y - \hat{Y} = Y - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 X) = Y - 1 - 1.75(X)$$
$$X = 2,3,1,5,9$$

للحصول على مقدرة التباين نستخدم المعادلة التالية

$$\sigma^2 = \frac{\sum u^2}{n-2} = \frac{1.5}{5-2} = 0.5$$

وبعد ذلك نستطيع أن نتحصل على تباين المقدرات

$$V(\dot{a}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x^2}\right) = 0.5\left(\frac{1}{5} + \frac{(120)^2}{40}\right) = 0.3$$

$$V(\dot{a}_1) = a_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{0.5}{40} = .0125$$

وللحصول على الانحراف المعياري نتحصل على الجذر التربيعي للتباين:

$$Se(\dot{a}_1) = \sqrt{V(\dot{a}_1)} = \sqrt{0.0125} = 0.112$$

$$Se(\dot{a}_0) = \sqrt{V(\dot{a}_0)} = \sqrt{0.3} = 0.548$$

فترات الثقة Confidence Interval

المقدرات مؤشـرات مهمه يمكن إن تستخدم لاستخلاص نتائج عن المجتمع التي استخلصت منه هذه المقدرات.لبناء فترات الثقة وأجراء اختبارات الفروض نستخدم التوزيع الطبيعي:

فترة الثقة:

$$\hat{a}_1 \sim N\left[a_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right], \qquad \hat{a}_1 \sim N\left[a_1, \sigma_{\hat{a}_1}^2\right]$$

إذا كانت a_1 تتوزع طبيعيا فستكون قيمة Z كما يلي:

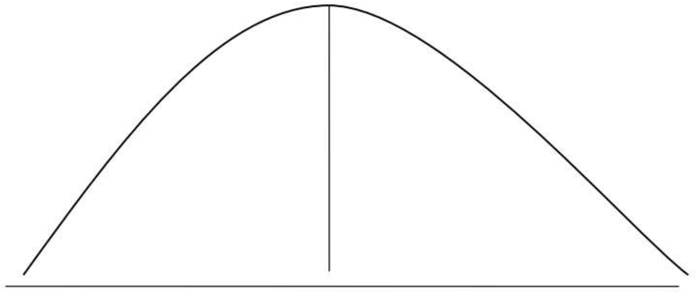
$$Z = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\sigma_{\hat{a}_1}}$$

إذا أخذت أي عشوائي يتوزع توزيع طبيعي وطرحت منه الوسط الخاص به وقسمته على الانحراف المعياري فان القيمة المتحصل عليها هي قيمة Z التي تتوزع طبيعيا بوسط صفر وتباين وانحراف معياري يساوي الواحد الصحيح. توزيع Z كما هو معروف يمكن استخلاص الاحتمالات الخاصة به من جدول التوزيع الطبيعي. وبذلك يمكن تحديد الاحتمال الخاص بحدوث أي قيمه من Z بالنظر إلي الجدول حيث يشير العمود الرأسي إلي اليسار إلي قيم Z والقيم بداخل الجدول تشير إلي الاحتمالات.

لاختبار الفرضية فإننا نختبر هل $\dot{a}_1$ تساوي a_1 أم تختلف عنها وإذا كانت تختلف هل هذا الاختلاف قليل يمكن التعايش معه أي إن الاختلاف راجع إلي العشوائية فقط وليس بالاختلاف الكبير الذي يشير إلي انه لا ينتمي إلي نفس المجتمع. ونرفض الفرضية انهما متساويان.

في القانون أعلاه هناك معلمه غير متوفرة وهي معلمة تباين المجتمع فاستخدمنا مقدرة التباين. مقدرة التباين لا تمتلك التوزيع الطبيعي ولكن تتبع توزيع t والذي يتحدد تبعا لدرجات الحرية المستعملة أي في هذه الحالة إلي n-2. توزيع t هو توزيع احتمالي مشابه للتوزيع الطبيعي وتوزيع t يتمركز حول الصفر ويأخذ شكل مماثل لتوزيع Z ،ويستخدم توزيعZ فقط عندما تكون حجم العينه كبيره n>30

توزيع t



الاختبار الإحصائي يكون

$$t = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\sigma_{\hat{a}_1}} \quad .... \quad Se = \text{الانحراف المعياري}$$

يمكن حساب فترات الثقة كما يلي:

$$\dot{a}_1 \pm t_{n-2.\frac{\lambda}{2}} Se(\dot{a}_1)$$

$$\dot{a}_0 \pm t_{n-2.\frac{\lambda}{2}} Se(\dot{a}_0)$$

قيمة t تمثل القيمة اختبار t عند درجة حرية n-2 عند مساحة λ/2 من توزيع t من المثال (3)

$$\hat{a}_1 \pm t_{n-2.\frac{\lambda}{2}} Se(\hat{a}_1)$$

$$1.7 \pm 2.228 \times 0.112$$

$$\pm 0.2495$$

$$1.45 \;______\; 1.94$$

$$\hat{a}_0 \pm t_{n-2.\frac{\lambda}{2}} Se(\hat{a}_0)$$

$$1 \pm 2.228 \times 0.548$$

$$1 \pm 1.2209$$

$$-0.22 \;______\; 2.22$$

إن شرح فترة الثقة يعني إن إن الاحتمال أن فترة الثقة المحددة تعطي المعلمة الحقيقية يساوي (λ -1) . ويستخدم عادة مستوى الثقة 95% أو 99%.

اختبار الفرضيات

:يتعلق اختبار الفرضيات بإيجاد ألا جابه على هذا السؤال ما اذا كانت القيمة المحسوبة من العينة متوافقة مع الفرضية أم لا؟ الكلمة متوافقة هنا تعني أن القيمة المحسوبة قريبه من القيمة المفترضة بحيث أننا لا نستطيع إن نرفض القيمة المفترضة. إي إذا كان هناك نظريه سابقه أو اعتقاد إن الميل الحقيقي لدالة الاستهلاك والدخل يساوي على سبيل المثال 1 هل القيمة المحسوبة أو المشاهدة والتي تساويa_1=0.509 و تحصل عليها من العينة متفقه مع القيمة التي افترضناها سابقا؟ إذا كان الجواب بنعم فاننا لا نرفض الفرضية.في القياسي نسمي القيمة المفترضة بفرضية العدم لفرضية البديلة

فرضية العدم $H_0: a_1 = a_1^*$ الفرضية البديلة $H_A: a_1 \neq a_1^*$

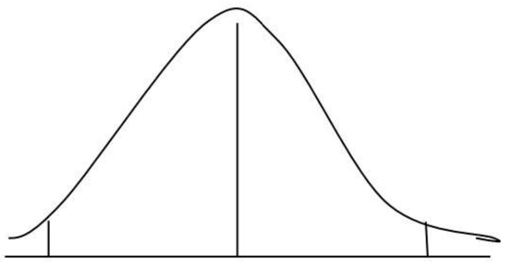
من المثال (1) نفترض إننا سوف نقوم باختبار الفرضية انه ليس هناك علاقة بين Y, X

فرضية العدم $H_0: a_1 = 0$ الفرضية البديلة $H_A\ a_1 \neq 0$

$$t = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{Se_\beta} \quad t = \frac{1.75 - 0}{0.112} = 15.65, \qquad t_{(n-k),(1-\alpha/2)} = t_{3,.(0.975)} = 3.182$$

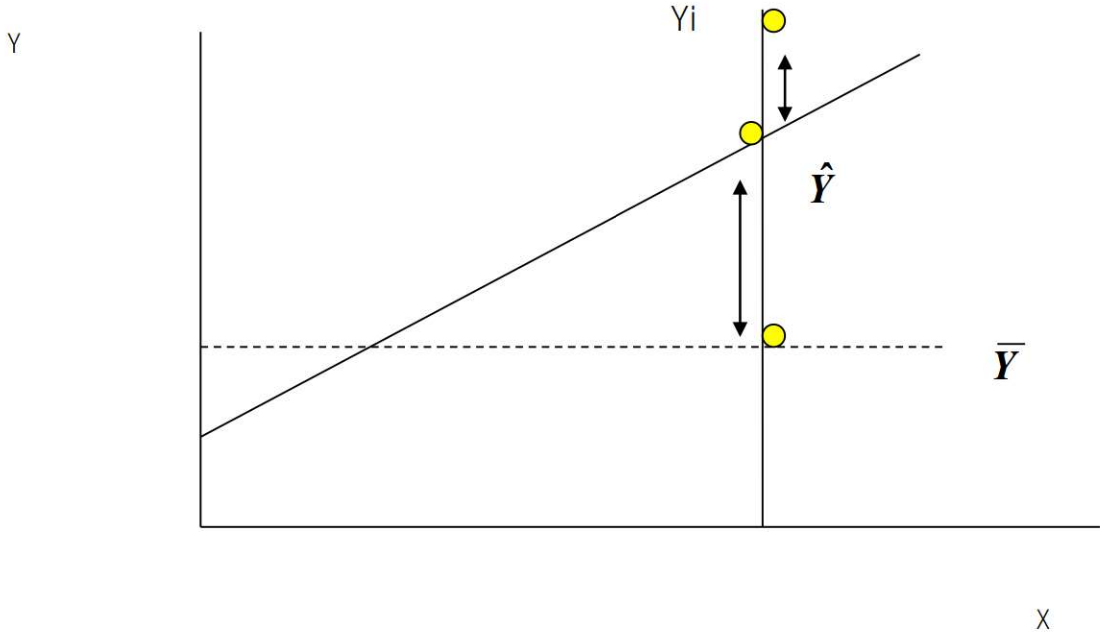
الاختبار يقارن بين ما تقوله الفرضية وما تقوله العينة إذا كان الفرق كبير إي اكثر من القيمة الجد وليه التي نحصلنا عليها من جدول t فأننا نرفض الفرض. إذا كان الفرق قليل فان هذا يعني إن العينة تؤيد ما يقوله الفرض وبالتالي نقبل الفرض.

توزيع t



t الجدوليه =3.182

يعني إننا يجب إن نوجد القيمة الفرضية من اجل اتخاذ القرار آما بقبول أو برفض . إن قرار القبول أو الرفض يتعلق بفرضية العدم وليس بالفرضيه البديلة.



$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X, \qquad Y_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X + u \qquad Y_i - \hat{Y} = u$$

7.2 اختبار جودة النموذج وتحليل التباين.

$$SST = \sum y_i = \sum (Y - \bar{Y})^2$$
$$SSR = \sum \hat{y}^2 = a_1 \sum x_i^2 = \sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2$$
$$SSE = \sum u_i^2 = \sum (\hat{Y} - Y)^2$$
$$SST = SSR + SSE$$

SST Total Sum of Squares	مجموع المربعات الإجمالي للتغيرات التي تحدث في المتغير التابعY
SSR Regression Sum of Squares	يسمى بمجموع مربعات الانحدار يعني جزء من تباين Y الذي تم تفسـيره بواسـطة الانحدار. إي الجزء من المتغيرات التي تحدث في المتغير التابع والذي تم تفسـيرها بواسـطة النموذج المقدر
SSE Error	مجموع مربعات البواقي، $\sum u^2$, وهذا مؤشـر للجزء الذي لم يفسـر بواسـطة نموذج الانحدار، إي الجزء الذي فشل النموذج في تفسيره

ويمثل نسبة مجموع مربعات الانحدار إلي مجموع المربعات الإجمالي ما يسمى بـ معامل التحديد

$$R_{xy}^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{SST - SSE}{SST} = \frac{\hat{a}_1 \sum xy}{\sum y_i^2}$$

قيمة R^2 تتراوح بين صفر وواحد. إذا كانت مرتفعه أي قريبه من الواحد تعتبرX جيده في تفسير التغيرات في Y. إذا كانت قريبه من الصفر فان المتغير لا يشرح إلا القليل من التغير في Y.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\hat{a}_1 \sum xy}{\sum y^2} = \frac{1.75(70)}{124} = \frac{122.5}{124} = 0.9879$$

جدول تحليل التباين لمعادلة الانحدارANOVA (Analysis Of Variance):

هو تحليل مجموع المربعات الصغرى إلي مجموع مربعات البواقي ومجموع مربعات الانحدار. الغرض من هذا التحليل لاختبار معنوية مجموع مربعات الانحدار وهذا أيضا يدخل في اختبار معنوية المعاملa_1.

ونمثل هذا التحليل في جدول تحليل التباين:

جدول تحليل التباين ANOVA

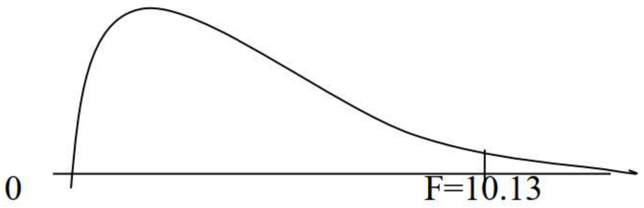
التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
مج مربعات الانحدار	$SSR = \sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2$	k-1=1	SSR/k-1
مج مربعات البواقي	$SSE = \sum(\hat{Y}_t - Y_t)^2 = \sum u^2$	n-k=n-2	SSE/(n-k)
مج مربعات إجمالي	$SST = \sum(Y_t - \overline{Y})^2$	n-1	$F = \frac{SSR}{SSE / n - k}$

جدول تحليل التباين للمثال (1)

التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
مجموع مربعات الانحدار	SSR=122.5	K-1=1	122.5/1
مجموع مربعات البواقي	SSE=1.500	n-k=3	1.5/3
مجموع مربعات الإجمالي	SST=124	n-1=4	$F=\frac{122.5/1}{1.5/3}=245.00$

اختبار F هو اختبار لجودة النموذج. يحاول أن يجيب على السؤال هل افلح النموذج في تفسير التغيرات التي تحدث في المتغير التابع. ويختبر الفرضية إن معاملات المتغيرات المفسرة تساوي الصفر. أي أن فرضية العدم تقول انه لا يوجد علاقة بين المتغيرات المفسرة والمتغير التابع. وتقارن قيمة المحسوبة من الجدول مع الجد وليه بدرجة حرية للبسط تساوي k-1 ودرجة حرية المقام n-k. قيمة الجد وليه عند مستوى معنوية 5%تساوي 10.13.

توزيع F



التنبؤ باستخدام معادلة الانحدار:

معادلة الانحدار المقدرة $\dot{Y}=\dot{a}_0+\dot{\beta}X+u_t$ تستخدم في عملية التنبؤ لقيم Y لقيم محدده من X .

إذا كانت X_0 تمثل القيمة المحددة منX تستخدم في التنبؤ بقيمة Y_0 من قيم Y.

$$\dot{Y}_0=\dot{a}_0+\dot{a}_1X_0+u_0$$

حيث u تمثل حد الخطأ.

حيث يمثل خطأ التنبؤ $$\dot{Y}_0-Y_0=(\dot{a}_0-a_0)+(\dot{a}_1-a_1)X_0+u_0$$

حيث إن $$E(\dot{a}_0-a_0)=0, E(\dot{a}_1-a_1)=0, E(u_0)=0$$

إذا تكون $$E(\dot{y}_0-y_0)=0$$

هذه تعني إن قيمة Y هي قيمه غير متحيزة ويكون تباين يساوي:

$$V(\dot{y}_0 - y_0) = V(\dot{a}_0 - a_0) + X_0^2 V(\dot{a}_1 - a_1) + 2X_0 COV(\dot{a}_0 - a_0, \dot{a}_1 - a_1) + V(u)$$

$$= \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2}\right] + \sigma^2 \frac{X_0^2}{\sum x_i^2} - 2X_0\sigma^2 \frac{\bar{X}}{\sum x_i^2} + \sigma^2$$

$$\boxed{= \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum x^2}\right]}$$

أي إن التباين يرتفع بارتفاع تباين X أي باختلاف قيم X عن قيم متوسطها.

باستخدام البيانات أعلاه نحصل على $Y=10.0+0.90\ X$

إذا استخدمنا $X_0=250$ ستكون قيمة Y_0 المتنبأ بها يساوي: $\hat{\sigma}^2 = 0.01, \bar{X} = 200, \sum x_i^2\ 4000,$

$$Y_0 = 10.0+0.9(250)=235$$

$$SE(\dot{Y}_0) = \sqrt{0.01\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{2500}{400}\right)} = 0.131$$

حيث أن $t=2.228$ من جدول مع 10 درجات حريه، و فترة الثقة 95% تكون

$$235 \pm 2.228\ (0.131) = 235 \pm\ 0.29$$

آي أن فترة الثقة تساوي $(234.71 \quad - \quad 235.29)$

<u>التنبؤ للقيمة المتوقعة:-</u>

أحيانا يرغب الباحث في التنبؤ بالقيمة المتوقعة لـY بدلا من Y_0 آي قيمة $E(Y_0)$ آي القيمة المتوسطة لـ Y_0 وليس $E(Y_0$. عند التنبؤ بالقيمة المتوقعة فان $E(Y_0)=Y_0$ حيث أن

$E(Y_0) = a_0 + a_1 X_0 + u_0$ فان القيمة المتنبأ بها تساوي

$\dot{E}(Y_0) = \dot{a}_0 + \dot{a}_1 X_0 + u_0$ آي يساوي Y_0 ولكن الخطأ المعياري والتباين سيكون مختلفا. سيكون اصغر قيمه

$$\dot{E}(y_0) - E(y_0) = (\dot{a}_0 - a_0) + (\dot{a}_1 - a_1)X_0$$

التباين يساوي:

$$\boxed{Var[E(y_0) - E(y_0)] = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum x^2}\right]}$$

والخطأ المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين وفترة الثقة تساوي

$$\hat{E}(y_0) \pm t \ SE$$

مثال:

النفقات الأعلانيه X	المبيعات Y	
1	3	1
2	4	2
3	2	3
4	6	4
5	8	5

للحصول على مقدرات النموذج:

مشاهده	المبيعات Y	النفقات الأعلانيه X	X^2	XY	u
1	3	1	1	3	0.80
2	4	2	4	8	0.60
3	2	3	9	6	2.60
4	6	4	16	24	0.20
5	8	5	25	40	1.00
	15	23	55		

SSE=8.8 X=3.0 Y =1.0 + 1.2 X

نفترض إن مدير المبيعات يرغب في التنبؤ بدخل المبيعات عندما تكون النفقات الاعلانيه تساوي 600 ريال. ويريد أيضا بناء 95% فترة ثقة لتنبوءه. X_0 =6 إذا

$$y=1.0 + 1.2(6)=8.2$$

والتباين يساوي $= \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{5} + \frac{(6-3)^2}{10} \right] = 2.1\sigma^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{d.f} = \frac{8.8}{3} = 3.93$$

الخطأ المعياري $\sqrt{2.1(2.93)} = \sqrt{6.153} = 2.48$

عند مستوى المعنوية 5% ، ودرجة حرية df=2.353. و 90% فتره

تمارين محلولة في الانحدار الخطي البسيط:

التمرين الأول:

فيما يلي بيانات عن كمية البروتين اليومي بالجرام التي يحتاجها الرضيع، ومقدار الزيادة في وزنه بالكغ، وذلك لعينة حجمها 10.

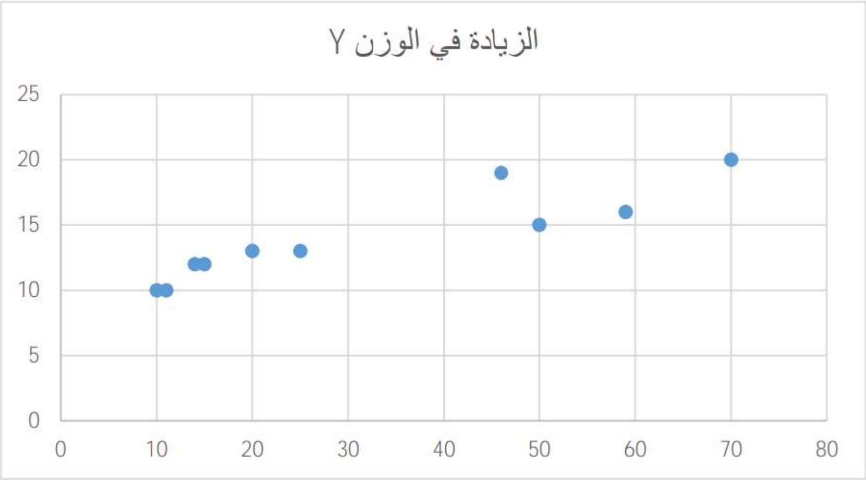
كمية البروتين	10	11	14	15	20	25	46	50	59	70
الزيادة في الوزن	10	10	12	12	13	13	19	15	16	20

والمطلوب :

1- ارسم نقط الانتشار، وما هو توقعاتك لشكل العلاقة ؟
2- قدر معادلة انحدار الوزن على كمية البروتين.
3- فسر معادلة الانحدار.
4- ما هو مقدار الزيادة في الوزن عند إعطاء الرضيع 50 غرام من البروتين ؟ وما هو مقدار الخطأ العشوائي؟
5- ارسم معادلة الانحدار على نقط الانتشار في المطلوب (1) .

الحـل

1- رسم نقط الانتشار



كمية البروتين x

من المتوقع أن يكون لكمية البروتين أثر طردي (إيجابي) على مقدار الزيادة في الوزن.

2- تقدير معادلة الانحدار.

بفرض أن x هي كمية البروتين، y هي مقدار الزيادة في الوزن، يمكن تطبيق المعادلتين، ومن ثم يتم حساب المجاميع التالية:

كمية البروتين x	الزيادة في الوزن y	$x\,y$	x^2
10	10	100	100
11	10	110	121
14	12	168	196
15	12	180	225

المجاميع المطلوبة
$\sum x = 320$ $\sum y = 140$

20	13	260	400
25	13	325	625
46	19	874	2116
50	15	750	2500
59	16	944	3481
70	20	1400	4900
320	140	5111	14664

$\sum xy = 5111$

$\sum x^2 = 14664$

إذا الوسط الحسابي:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{320}{10} = 32$$

$$\bar{y} = \frac{\sum x}{n} = \frac{140}{10} = 14$$

- بتطبيق المعادلة الأولى يمكن حساب $\hat{a}_1$ كما يلي

$$\hat{a}_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{(10)(5111) - (320)(140)}{(10)(14664) - (320)^2}$$

$$= \frac{6310}{44240} = 0.1426$$

- بتطبيق المعادلة الثانية يمكن حساب $\hat{a}_0$ كما يلي:

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1\bar{x} = 14 - (0.1426)(32) = 9.4368$$

- إذا معادلة الانحدار المقدرة، هي:

$$\hat{y} = 9.44 + 0.143x$$

3- تفسير المعادلة:

- الثابت $\hat{a}_0 = 9.44$: يدل على أنه في حالة عدم استخدام البروتين في التغذية، فإن الوزن يزيد 9.44 كجم.
- معامل الانحدار $\hat{a}_1 = 0.143$: يدل على أنه كلما زادت كمية البروتين جرام واحد، حدث زيادة في وزن العجل بمقدار 0.143 كجم، أى زيادة مقدارها 143 جرام.

4- مقدار الزيادة في الوزن عند $x = 50$ هو:

$$\hat{y} = 9.44 + 0.143(50) = 16.59$$

وأما ومقدار الخطأ العشوائي هو:

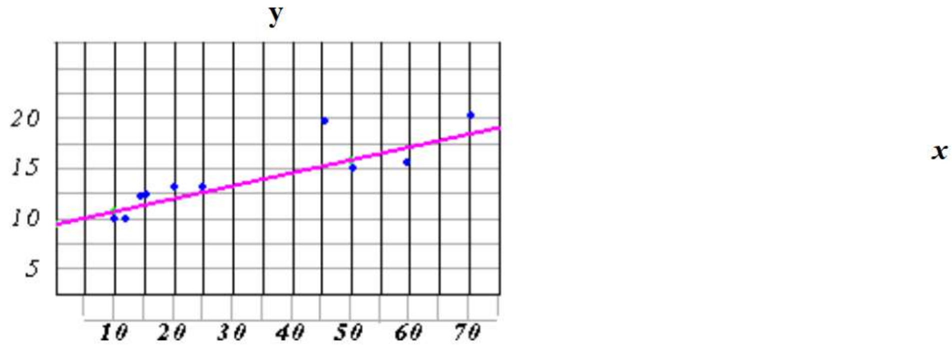
$$\hat{e}_{x=50} = y_{x=50} - \hat{y}_{x=50} = 15 - 16.59 = -1.59$$

5- رسم معادلة الانحدار على نقط الانتشار.

يمكن رسم معادلة خط مستقيم إذا علم نقطتين على الخط المستقيم.

x	50	10
$\hat{y}$	16.59	10.87

إذا معادلة الانحدار هي:



التمرين الثاني :

لدراسة علاقة الاستهلاك المحلي (y) بالإنتاج (x) لمادة الاسمنت (بالمليون طن) خلال عدة سنوات، أخذنا عشر قراءات تقريبية كما يلي:

x	10	13	15	14	9	7	6	6	5	5
y	6	8	9	8	7	6	5	6	5	5

أوجد معادلة الانحدار الخطي البسيط مع تفسيرها، وتوقع قيمة الاستهلاك المحلي عندما يصل الإنتاج الى 11000000 طن ؟

الحل:

الطريقة الأولى:

x	y	xy	x^2
10	6	60	100
13	8	104	169
15	9	135	225
14	8	112	196
9	7	63	81
7	6	42	49
6	5	30	36
6	6	36	36
5	5	25	25
5	5	25	25
$\sum x$	$\sum y$	$\sum xy$	$\sum x^2$
90	65	632	942

$$a_1 = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \qquad a_1 = \frac{6320 - (90)(65)}{9420 - (90)^2} \quad = 0.36$$

$$a_0 = \frac{\sum y - a_1 \sum x}{n} \qquad a_0 = \frac{65 - (0.36 \times 90)}{10} \quad = 3.26$$

اذن معادلة خط الانحدار البسيط :

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x \qquad \hat{y} = 3.26 + 0.36x$$

ولتوقع قيمة الاستهلاك المحلي عندما يصل 11.000.000 طن
نحول الوحدة من طن الى مليون طن بالقسمة على مليون أي أن قيمة الانتاج x=11 بالتعويض في معادلة الانحدار :

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x \qquad \hat{y} = 3.26 + 0.36(11) \quad = 7.22$$

أي ان الاستهلاك المحلي يصل الى 7.22 **مليون طن أي مايعادل** 7220000 **طن خلال السنة .**

الطريقة الثانية:

السنة (t)	X_1	Yi	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$(X_i - \bar{X}).(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$\hat{Y}$	$(Y_i - \hat{Y})$	$(Y_i - \hat{Y})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(\hat{Y} - \bar{Y})^2$
1	6	10	-0,5	1	-0,5	1	6,856	-0,856	0,733	0,127	0,250
2	8	13	1,5	4	6	16	7,924	0,076	0,006	2,028	2,250
3	9	15	2,5	6	15	36	8,636	0,364	0,132	4,564	6,250
4	8	14	1,5	5	7,5	25	8,280	-0,280	0,079	3,169	2,250
5	7	9	0,5	0	0	0	6,500	0,500	0,250	0,000	0,250
6	6	7	-0,5	-2	1	4	5,788	0,212	0,045	0,507	0,250
7	5	6	-1,5	-3	4,5	9	5,432	-0,432	0,186	1,141	2,250
8	6	6	-0,5	-3	1,5	9	5,432	0,568	0,323	1,141	0,250
9	5	5	-1,5	-4	6	16	5,076	-0,076	0,006	2,028	2,250
10	5	5	-1,5	-4	6	16	5,076	-0,076	0,006	2,028	2,250
$\sum$	**65**	**90**	**0**	**0**	**47**	**132**			**1,765**	**16,735**	**18,500**
$\bar{X}$ =	**6,5**	**9**	$\bar{Y}$=				**a_1=**	**0,356**	**SSE**	**SSR**	**SST**
							a0=	**3,295**		**R^2=**	**0,905**

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2} \quad \Rightarrow \hat{a}_1 = \frac{47}{132} \quad \Rightarrow \hat{a}_1 = 0,356$$

$$\hat{a}_0 = \bar{Y} - \hat{a}_1 \bar{X} \quad \Rightarrow \hat{a}_0 = 9 - (6,5\ .\ 0,356) \quad \Rightarrow \hat{a}_0 = -3,295$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = 0,356\ \mathbf{X_1} + 3,295$$

التمرين الثالث :

إحدى الشركات ترغب فى تحديد العلاقة بين إنفاقها على الدعاية (X) وعوائد المبيعات (Y) ، كلاهما بالمليون دينار ، وذلك باستخدام البيانات التالية :

المطلوب :

1 ايجاد مقدرات النموذج ثم تحدد معادلة الانحدار.

2 ايجاد تباين مقدرات النموذج.

3 دراسة صلاحية النموذج عند مستوى 1%.

4 حساب معامل التحديد, مادا تستنتج؟

5 التنبؤ بمبيعات الشركة عند ميزانية دعاية تبلغ 12 مليون دينار.

6 تقدير قيمة Y عند X=5 و X=10و $X = 20$ مليون دينار

لماذا لا يمكنك الثقة فى مصداقية القيمة التقديرية لـ Y عند $X = 20$ ؟

7 حساب إجمالى التغير والتغير المفسر والتغير غير المفسر لـ Y .

الحـــل

t (سنة)	X_1	Y_i	$X_i-\bar{X}$	$Y_i-\bar{Y}$	$(X_i-\bar{X}).(Y_i-\bar{Y})$	$(X_i-\bar{X})^2$	$\hat{Y}$	$(Y_i-\hat{Y})$	$(Y_i-\hat{Y})^2$	$(Y_i-\bar{Y})^2$	$(\hat{Y}-\bar{Y})^2$
1	44	4	-11	-3	33	9	40,79	3,21	10,304	201,924	121
2	42	5	-13	-2	26	4	45,52	-3,52	12,390	89,870	169
3	52	6	-3	-1	3	1	50,25	1,75	3,063	22,563	9
4	48	6	-7	-1	7	1	50,25	-2,25	5,063	22,563	49
5	50	7	-5	0	0	0	54,98	-4,98	24,800	0,000	25
6	60	8	5	1	5	1	59,71	0,29	0,084	22,184	25
7	58	7	3	0	0	0	54,98	3,02	9,120	0,000	9
8	62	9	7	2	14	4	64,44	-2,44	5,954	89,114	49
9	64	8	9	1	9	1	59,71	4,29	18,404	22,184	81
10	70	10	15	3	45	9	69,17	0,83	0,689	200,789	225
	550	**70**	**0**	**0**	**142**	**30**			**89,871**	**671,191**	**762**
	55	**7**			**a_1=**	**4,73**			**SSE**	**SSR**	**SST**

R^2= **0,8808**

الطريقة الثانية:

	y	x	y.x	x^2				
1	44	4,00	176,00	16,00				
2	42	5,00	210,00	25,00				
3	52	6,00	312,00	36,00				
4	48	6,00	288,00	36,00	a_1=	4,733333333		
5	50	7,00	350,00	49,00	a_0=	21,86666667		
6	60	8,00	480,00	64,00	Va_1=	0,3744625	Sa_1=	0,611933411

7	58	7,00	406,00	49,00	Va_0=	19,75289688	Sa_0=	4,444423121
8	62	9,00	558,00	81,00	Vu=	11,233875	t=	7,735046404
9	64	8,00	512,00	64,00				
10	70	10,00	700,00	100,00				
	550,00	**70,00**	**3 992,00**	**520,00**				
	55,00	**7,00**						

$$a_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})^2} = \frac{142}{30} = 4.733$$

$$\hat{a}_0 = \overline{Y} - a_1\overline{X} = 55 - 4.733(7) = 21.87$$

ومن ثم ، تكون معادلة خط الانحدار هى :

$$\dot{Y}_t = 21.87 + 4.73X_t$$

للتنبؤ بأن مبيعات الشركة عند ميزانية دعاية تبلغ (مثلاً) 12 مليون دينار سوف تكون $21.87 + 4.73(12) = 78.63$ ، أى 78.63 مليون دينار . ويوضح الشكل نقاط التفرق وخط الانحدار.

$$s_{a_1} = \sqrt{\frac{\sum e_t^2}{(n-k)\sum(X_t - \overline{X})^2}} = \sqrt{\frac{89.8746}{(10-2)(30)}} = \sqrt{0.3745} = 0.61$$

2 - وبالتوسع فى الجدول لإيجاد القيم اللازمة لتطبيق المعادلة بالنسبة لـ $S\,a_1$ ، نجد أن

$S\,a_1 = 0.61$. إذن :

$$t = \frac{a_1}{s_{a_1}} = \frac{4.73}{0.61} = 7.74$$

لاختبار الأهمية الإحصائية لـ $\hat{b}$ عند مستوى 1% ، ننظر فى العمود تحت قيمة 0.01 لتوزيع t فى الجدول C.2 عند 8 = n – k = 10 – 2 ، 8 درجات حرية . ومن الجدول نُجد أن القيمة الحرجة تساوى 3.355 . وبما أن قيمة 7.74 لإحصاء t التى أوجدناها أكبر من القيمة الحرجة لتوزيع t ، فإننا نستنتج أن a_1 هامة إحصائياً عند مستوى 1% . ، نجد أن $R^2 = 0.8821$ ، مما يعنى أن التغير فى نفقات الدعاية (X) تفسر 88.21% من التغير فى المبيعات (Y) .

$$R^2 = \frac{\text{Explained variation in } Y}{\text{Total variation in } Y} = \frac{\sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2}{\sum(Y_t - \overline{Y})^2} = \frac{671.19}{762} = 0.8808$$

والجذر التربيعى لـ R^2 هو معامل الارتباط (r) وهو الذى يقيس درجة الارتباط بين المتغيرين X و Y . لذلك فإنه بالنسبة لهذه المسألة : $r = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.8808} = 0.94$. وهنا تتراوح قيمة r بين 1– (إذا كانت جميع نقاط المشاهدة تقع على خط مستقيم سالب الميل) و 1 (حيث يكون هناك ارتباط خطى موجب تام) .

- ما هو الغرض من تحليل الانحدار ؟

(أ) يعد تحليل الانحدار بمثابة طريقة إحصائية لتقدير العلاقة الكمية بين المتغير الاقتصادى الذى نسعى لتفسيره (المتغير التابع والذى يرمز له بالرمز Y) وبين متغير واحد مستقل أو أكثر (ويرمز له بحرف X) وعندما يكون هناك متغير واحد مستقل تسمى هذه العملية عملية انحدار بسيط . وعندما يكون هناك أكثر من متغير مستقل واحد تسمى انحدار متعدد . ويتم تقدير معادلة الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى ، وهى الطريقة التى تؤدى إلى تدنية مجموع مربعات الانحرافات الراسية لنقاط المشاهدة عن خط الانحدار .

(ب) عند $X = 5$ million ، تكون million $\hat{Y}_t = 21.87 + 4.73(5) = 45.52$

عند $X = 10$ million ، تكون million $\hat{Y}_t = 21.87 + 4.73(10) = 69.17$

عند $X = 20$ million ، تكون million $\hat{Y}_t = 21.87 + 4.73(20) = 116.47$

(ج) لا يمكننا الثقة فى مصداقية قيمة Y عند $X = 20$ مليون دينار ؛ لأن قيمة نفقات الدعاية التى قدرها 20 مليون دينار أكبر بكثير من النفقات المستخدمة فى تقدير الانحدار . أى أنه لا يمكن لمعادلة الانحدار سوى التنبؤ بالمبيعات فى نطاق القيم المستخدمة فى تقدير الانحدار أو اقرب ما يكون منة . ولهذا السبب كثيراً ما تتوفر لدينا الثقة فى قيمة a (الحد الثابت أو نقطة التقاطع الرأسية) ، ومن ثم فإننا عادة لا نقوم باختبار قيمتها الإحصائية .

التمرين الرابع:

قام أحد الباحثين بدراسة مدى تأثير مساحة المحل كمتغير مستقل Si على سعر المحل كمتغير تابع Y_i حيث سجلت النتائج في الجدول المقابل (بالدينار).

Si	Y_i
40	80
80	80
60	120
20	40
45	50
90	90
100	90
110	140

المطلوب:

1- تقدير نموذج الانحدار
2- ايجاد انحرافات المقدرات مع اختبار معنويتها. $\alpha = 0.5$
3- حساب معامل التحديد, مادا نستنتج؟
4- اختبار صلاحية النموذج من خلال جدول تحليل التباين. $\alpha = 0.5$

- **تقدير نموذج الانحدار:**

Xi	Yi	Xi $\overline{X}$	Yi $\overline{y}$	(Xi $\overline{X}$)x(Yi $\overline{y}$)	(Xi $\overline{X}$)²	$\hat{Y}_t$	(Yi $\hat{Y}_t$)²	(Yi $\overline{y}$)²
40	80	-28,13	-6	175,78	791,02	65,07	222,825622	39,0625
80	80	11,88	-6	-74,22	141,02	95,19	230,783057	39,0625
60	120	-8,13	34	-274,22	66,02	80,13	1589,44942	1 139,0625
20	40	-48,13	-46	2 225,78	2 316,02	50,01	100,264375	2 139,0625
45	50	-23,13	-36	838,28	534,77	68,84	354,852028	1 314,0625
90	90	21,88	4	82,03	478,52	102,72	161,830664	14,0625
100	90	31,88	4	119,53	1 016,02	110,25	410,102626	14,0625
110	140	41,88	54	2 250,78	1 753,52	117,78	493,6967	2 889,0625
545	690	0,00	0,00	5 343,75	7 096,88	690,00	3 563,80	7 587,50
68	86						SSE	SST

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})^2} \Rightarrow \hat{a}_1 = \frac{5343,75}{7096,88} \Rightarrow \hat{a}_1 = 0,75$$

$$\hat{a}_0 = \overline{Y} - \hat{a}_1 \overline{X} \quad \Rightarrow \hat{a}_0 = 86 - (0,75\ .\ 68) \quad \Rightarrow \hat{a}_0 = 34,95$$

<u>النموذج المقدر:</u> $\hat{Y}_t = 0,75\ X + 34,95$

<u>ايجاد انحرافات المقدرات:</u>

$$\sigma_{\hat{a}_1} = \sqrt{\frac{\sum(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{(n-k)\sum(X_t - \overline{X})^2}} \quad \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_1} = \sqrt{\frac{3563,8}{(6).\ 7096,88}} \quad \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_1} = 0,289$$

$$\sigma_{\hat{a}_0} = \sqrt{\frac{\sum u_t^2}{(n-k)}\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum(X_t - \overline{X})^2}\right)} \quad \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_0} = \sqrt{\frac{3563,8}{(6)}\left(\frac{1}{8} + \frac{68^2}{7096,88}\right)} \quad \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_0} = 21,51$$

اختبار المعنوية: صياغة الفرضيات: $H_0 : a_1 = 0$ ، $H_1 : a_1 \neq 0$

$$t_{a1} = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\sigma_{\hat{a}_1}} \Rightarrow t_{a1} = \frac{0,75 - 0}{0,289} = 2,59 > t_{0.975}^{6} = 2,44$$

- اذن مساحة المحل تؤثر على السعر.

حساب معامل التحديد: $R^2 = \frac{SSR}{SST} \quad \Rightarrow R^2 = \frac{7587,5 - 3563,8}{7587,5} \quad \Rightarrow R^2 = 0,53$

<u>الاستنتاج:</u> مساحة المحل تفسر 53 % من السعر، والباقي 47 % يمثله الخطأ العشوائي, و هذا غير كافي لقبول النموذج.

3- اختبار صلاحية النموذج من خلال جدول تحليل التباين:

صياغة الفرضيات: $H_0 : a_1 = 0$ ، $H_1 : a_1 \neq 0$, $F_{0.05}^{1,6} = 5,99 < F = 6,77$

التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
مج مربعات الانحدار	$SSR = \sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2 = 4023,7$	k-1=1	SSR/k-1= 4023,7
مج مربعات البواقي	$SSE = \sum(\hat{Y}_t - Y_t)^2 = 3563,8$	n-k =6	SSE/(n-k)=3563,8/6
مج مربعات إجمالي	$SST = \sum(Y_t - \overline{Y})^2 = 7587,5$	n-1	$F = \frac{4023,7}{/6} = \mathbf{6,77}$

<u>القرار:</u> بمأن الاحصائية المحسوبة تقع في منطقة رفض H_0 فانه يتم قبول H_1 معناه أن النموذج صالح للتنبؤ.

التمرين الخامس:

قام أحد الباحثين بدراسة مدى تأثير الدخل كمتغير مستقل Y_i على الاستهلاك كمتغير تابع Ci

حيث سجلت النتائج في الجدول المقابل (بالألف دينار).

1- **المطلوب:**

1- رسم منحنى الانتشار مع تحدد نوع العلاقة.

2- تقدير نموذج الانحدار مع رسم خط الانحدار على نفس المنحنى السابق.

3- ايجاد انحرافات المقدرات, مع اختبار صلاحيتها.

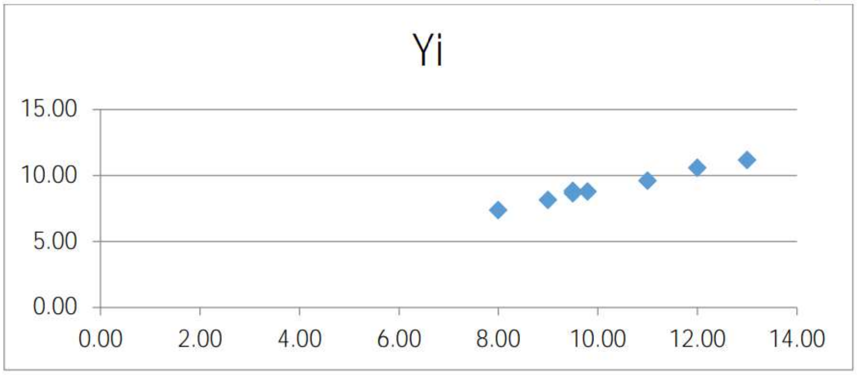
4- حساب معامل التحديد, مادا نستنتج؟

5- اختبار صلاحية النموذج من خلال جدول تحليل التباين.

Y_i	Ci
8	7,38
9	8,16
9,5	8,83
9,5	8,65
9,8	8,78
11	9,61
12	10,59
13	11,18

الحل:

رسم منحنى الانتشار:



X_i	Y_i	$X_i-\bar{X}$	$Y_i-\bar{Y}$	$(X_i-\bar{X}).(Y_i-\bar{Y})$	$(X_i-\bar{X})^2$	$\hat{Y}$	$(Y_i-\hat{Y})^2$	$(Y_i-\bar{Y})^2$
8	7,38	-2,23	-2	3,93	5	7,47	0,0076	3
9	8,16	-1,23	-1	1,21	2	8,22	0,0039	1
9,5	8,83	-0,73	0	0,23	1	8,60	0,0529	0
9,5	8,65	-0,73	0	0,36	1	8,60	0,0025	0
9,8	8,78	-0,42	0	0,16	0	8,83	0,0022	0
11	9,61	0,78	0	0,36	1	9,73	0,0151	0
12	10,59	1,78	1	2,56	3	10,49	0,0105	2
13	11,18	2,78	2	5,64	8	11,24	0,0040	4
82	**73**	**0,00**	**0,00**	**14,45**	**19**	**73,18**	**0,10**	**11**
10,2250	**9,1475**						**SSE**	**SST**

	a_1	a_0
	0,75508	1,42678
s=	0,02930	0,30297

R^2=	0,99105	**Su**=0,12816
F=	664,26512	6
	10,90981	0,09854
	SSR	**SSE**
		Vu=0,0164
a_1=	0,7551	Va_1=0,0009
a_0=	1,4268	Va_0=0,0918

Su=	0,1282
Sa_1=	0,0293
Sa_0=	0,3030

التمرين السادس:

قام أحد الباحثين بدراسة مدى تأثير الدخل كمتغير مستقل Y_i على الاستهلاك كمتغير تابع Ci حيث سجلت النتائج في الجدول المقابل (بالدينار).

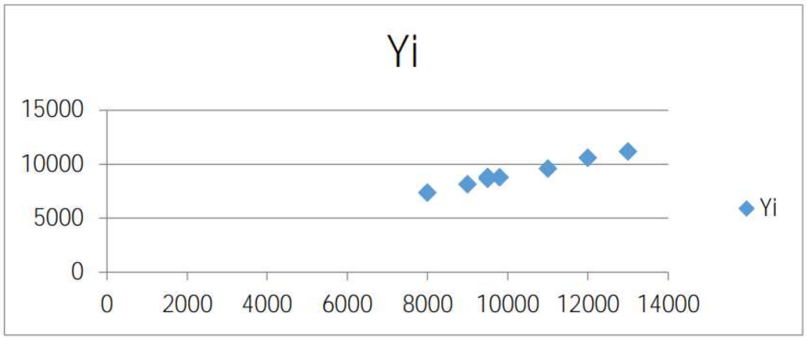
المطلوب:

5- رسم منحنى الانتشار مع تحدد نوع العلاقة بين المتغيرين.
6- حساب معامل الارتباط, مادا نستنتج؟
7- تقدير نموذج الانحدار مع رسم خط الانحدار على نفس المنحنى السابق.
8- ايجاد انحرافات المقدرات مع اختبار معنويتها. $\alpha = 0.5$
9- حساب معامل التحديد, مادا نستنتج؟
10- اختبار صلاحية النموذج من خلال جدول تحليل التباين. $\alpha = 0.5$
11- التنبؤ بقيمة الاستهلاك عند دخل قدره 9800 دينار, قارن هده النتيجة مع الجدول, ما هو تفسيرك؟
12- من خلال هده الدراسة, ضع تفسيرا اقتصاديا.

Y_i	Ci

حل التمرين:

رسم منحنى الانتشار:



X_1	Y_i	$X_i-\bar{X}$	$Y_i-\bar{Y}$	$(X_i-\bar{X}).(Y_i-\bar{Y})$	$(X_i-\bar{X})^2$	$\hat{Y}$	$(Y_i-\hat{Y})^2$	$(Y_i-\bar{Y})^2$
8000	7380	-2225	-1768	3932687,50	4950625	7467,44	7646,08	3124056,25
9000	8160	-1225	-988	1209687,50	1500625	8222,52	3909,27	975156,25
9500	8830	-725	-318	230187,50	525625	8600,07	52869,95	100806,25
9500	8650	-725	-498	360687,50	525625	8600,07	2493,47	247506,25
9800	8780	-425	-368	156187,50	180625	8826,59	2170,63	135056,25
11000	9610	775	463	358437,50	600625	9732,69	15052,54	213906,25
12000	10590	1775	1443	2560437,50	3150625	10487,77	10450,75	2080806,25
13000	11180	2775	2033	5640187,50	7700625	11242,85	3950,55	4131056,25
81800	**73180**	**0**	**0**	**14448500,00**	**19135000**	**73180,00**	**98543,25**	**11008350,00**
10225	**9148**						**SSE**	**SST**

	a_1	a_0	
	0,75508	1 426,78338	
s=	0,02930	302,96938	
R^2=	0,99105	128,15566	**Su=**
F=	664,26512	6	
	10 909 806,75464	98 543,24536	
	SSR	**SSE**	

		16 423,8742	**Vu=**	**Su=**	128,1557
a1=	0,7551	0,0009	**Va1=**	**Sa1=**	0,0293
a0=	1 426,7834	91 790,4452	**Va0=**	**Sa0=**	302,9694

التمرين السادس :

يبين التوزيع التالي العلاقة بين حجم الاستثمار والناتج المحلي الخام، بين 1991 و2002 في بلد ما علما أن الناتج المحلي الخام متغير مستقل:

حجم الاستثمار	الناتج المحلي الخام	السنة
1	0	1991
2	1	1992
5	2	1993
10	3	1994
20	4	1995
25	5.5	1996
35	7	1997
40	8	1998
45	9.5	1999
55	10.5	2000
65	11.5	2001
75	14	2002

المطلوب:

1- ارسم شكل انتشار النقط، ماذا تلاحظ؟
2- قدر معلمات النموذج الخطي البسيط.
3- ارسم معادلة الانحدار على نقط الانتشار
4- أدرس صلاحية النموذج عند مستوى معنوية 10%. ماذا تلاحظ؟
5- أنشئ جدول تحليل التباين مع التفسير.
6- حساب معامل التحديد، مادا تستنتج؟
7- قدر مجال الثقة لمتوسط حجم الاستثمار عند مستوى 70 من الناتج المحلي الخام وبمستوى معنوية 5%.

الحل: الطريقة الأولى:

X_i	Y_i	$X_i-\bar{X}$	$Y_i-\bar{Y}$	$(X_i-\bar{X}).(Y_i-\bar{Y})$	$(X_i-\bar{X})^2$	$\hat{Y}$	$(Y_i-\hat{Y})$	$(Y_i-\hat{Y})^2$	$(Y_i-\bar{Y})^2$	$(\hat{Y}-\bar{Y})^2$
1	0,0	-30,5	-6,33	193,07	40,07	-3,89	4,89	23,9121	1252,4521	930,25
2	1,0	-29,5	-5,33	157,24	28,41	1,70	0,30	0,0914	888,182254	870,25
5	2,0	-26,5	-4,33	114,75	18,75	7,29	-2,29	5,2223	586,355252	702,25
10	3,0	-21,5	-3,33	71,60	11,09	12,87	-2,87	8,2532	346,971095	462,25
20	4,0	-11,5	-2,33	26,80	5,43	18,46	1,54	2,3702	170,029782	132,25
25	5,5	-6,5	-0,83	5,40	0,69	26,84	-1,84	3,3925	21,6981463	42,25
35	7,0	3,5	0,67	2,35	0,45	35,22	-0,22	0,0499	13,862911	12,25
40	8,0	8,5	1,67	14,20	2,79	40,81	-0,81	0,6576	86,6929765	72,25
45	9,5	13,5	3,17	42,80	10,05	49,19	-4,19	17,5756	313,018408	182,25
55	10,5	23,5	4,17	98,00	17,39	54,78	0,22	0,0484	541,955585	552,25
65	11,5	33,5	5,17	173,20	26,73	60,37	4,63	21,4596	833,335607	1122,25
75	14,0	43,5	7,67	333,65	58,83	74,34	0,66	0,4401	1834,97311	1892,25
1	**0,0**	**-30,5**	**0,04**	**1 233,00**	**220,67**			**83,4728478**	**6889,52722**	**6973**
31,50	**6,33**							**SSE**	**SSR**	**SST**

$R^2 =$ 0,98802914

طريقة الثانية:

	y	x	y.x	x^2				
1	1,00	0,00	0,00	0,00				
2	2,00	1,00	2,00	1,00				
3	5,00	2,00	10,00	4,00				
4	10,00	3,00	30,00	9,00	$a_1=$	5,58761329		
5	20,00	4,00	80,00	16,00	$a_0=$	-3,88821752		
6	25,00	5,50	137,50	30,25	$Va_1=$	0,03782755	$Sa_1=$	0,19449306
7	35,00	7,00	245,00	49,00	$Va_0=$	2,21291219	$Sa_0=$	1,48758603
8	40,00	8,00	320,00	64,00	Vu=	8,34728478	t=	28,7291135
9	45,00	9,50	427,50	90,25				
10	55,00	10,50	577,50	110,25				
11	65,00	11,50	747,50	132,25				
12	75,00	14,00	1 050,00	196,00				
	378,00	**76,00**	**3 627,00**	**702,00**				

الفصل الرابع : الانحدار الخطي المتعدد :

نموذج الانحدار المتعدد ويسمى أحيانا النموذج الخطي العام هو امتداد للنموذج البسيط حيث انه يتضمن اكثر من متغير مستقل واحد، في حالة النموذج البسيط كان الأمر يعتمد على متغيرين متغير تابع والآخر متغير مستقل، لكن في حالة النموذج العام قد يتضمن عدد من المتغيرات من بينها قد يكون هناك تابع واحد والعديد من المتغيرات المستقلة.

$$Y_i = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots\ldots + a_k X_k + u_i$$

المتغيرات المستقلة هي X_1 X_2 الى X_k و a_0 هي القاطع . أي نموذج يتضمن اكثر من متغيرين يعتبر نموذج انحدار متعدد مثل نموذج الاستهلاك قد يتضمن التالي:-

$$Y_i = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + u_i$$

حيث Y_I تمثل الاستهلاك و X_1 تمثل الدخل وX_2 تمثل السعرX_3 الثروة. أن النماذج المتعددة تكون هي الحالة السائدة بالاقتصاد حيث انه من العسير إن تجد متغير نحدده بأنه هو المتغير التابع ومفسر من قبل متغير مفسر واحد هو الذي يؤثر على المتغير التابع، ففي العادة يتوقع كثير من التأثيرات.

في العادة تكون a_1مضروبة في 1 وذلك للحصول على القاطع. وتمثلa_1 a_2 a_3معلمة الميل والتي تمثل مدى استجابة المتغير التابع للتغيرات في و X_1 وX_2 وX_3 . يتضمن نموذج الانحدار عدد من المتغيرات المستقلة يساوي K-1 .

تكثر النماذج المتعددة في الاقتصاد لا نه من العسير أن نجد متغير تابع مفسر من قبل متغير واحد فقط أي متغير واحد هو الذي يؤثر على المتغير التابع. نتوقع كثير من التأثيرات فدوال الاستهلاك على سبيل المثال تتأثر بمتغير الدخل، الثروة والسعر. فتكاد تكون نماذج الانحدار المتعدد او العام هي الحالة العامة وليس الاستثناء، الاستثناء هو النموذج البسيط.

الفروض الاساسية للنموذج العام:

هي نفس الفروض التي يستند عليها النموذج البسيط لكي نتحصل على النموذج المقدر:

1- u_I يتوزع طبيعيا.

2- $E(u_i) = 0$ وسط يساوي الصفر. أي انه ليس هناك خطأ تحديد، وبالتالي نتوقع أن تكون المقدرات غير متحيزة.

3- يضيف الى افتراض افتراض ثبات التباين فرض يشمل ثبات التباين وانعدام التغاير $COV(u_i, u_j) = 0$ عندما تكون i≠j . وبالمقابل لو كانت i =j فان

$$COV(u_i, u_j) = COV(u_i, u_j) = V(u_i)^2$$

4- المتغيرات المستقلة غير عشوائية إي ثابتة في المعاينات المتكررة.

5- عدد المشاهدات n يفوق عدد المتغيرات k أي أن n>K ويؤدي هذا إلى درجات حرية في حالة نموذج المتغيرين: يكون التباين $V(u_i)=\frac{\sigma^2}{n-2}$ في الحالة العامة يكون التباين $V(u_i)=\frac{\sigma^2}{n-k}$ بحيث تقيس K عدد المتغيرات المتضمنة في النموذج كافه، وكلما كانت n>k يؤدي إلى المزيد من درجات الحرية وبالتالي إلى المزيد من دقة القياس. حيث يستعمل التباين في قياس دقة المقدرات فكلما كان التباين قليل كلما كان الأمر افضل، إذا كانت n>k النتيجة سيكون المقام كبير و تقل قيمة مقدرة التباين $\dot{\sigma}^2$ وكلما قل تباين $\dot{a}^2$ كلما تحسن قياسها.

6-لا توجد علاقة خطيه بين المتغيرات المستقلة، على سبيل المثال لا توجد علاقة بين X_1 , X_2 كالتالي:

$$X_2 = X_3 \quad \text{أو} \quad X_3 = 2X_4 \quad \text{أو} \quad X_2 = X_3 + X_4$$

هذه علاقات خطيه يفترض أنها لا توجد لاحظي أننا نحدد المتغيرات المستقلة فقط وبعلاقة خطيه إي انه لا يوجد اعتراض على العلاقات الغير خطيه. ولا يوجد اعتراض على العلاقة القوية بين المتغير المستقل والمتغير التابع في الواقع يفض أن يكون هناك علاقة قوية بين المتغير المستقل والمتغير التابع، ولكن لا يكون هناك علاقات قوية تربط بين المتغيرات المستقلة بعضها مع بعض لا نه يترتب عليها شئ في غاية الخطورة وبالحد الأقصى يمكن أن يؤدي إلى انهيار طريقة المربعات الصغرى.

لا توجد علاقة خطيه محدده بين المتغيرات المفسرة. على سبيل المثال إذا كانت $2X_1 + X_2 = 4$ فإننا نستطيع أن نعبر عن X_2 بقيمه لـ X_1 ويمكن استخدامها في علاقة الانحدار $X_2 = 4 - 2X_1$

$$Y = a + a_1 X_1 + a_2(4 - 2X_1) + u$$

$$Y = (a + 4a_2) + (a_1 - 2a_2)X_1 + u$$

نستطيع أن نقدر القيم بين الأقواس ولا نستطيع أن نقدر المعالم a ، a_2 ، a_1 بمفردها.

للحصول على النموذج المقدر نتبع إحدى الطرق التالية:

1-طريقة المربعات الصغرى.

2-طريقة الإمكانية العظمى.

طريقة المربعات الصغرى وتطبيقها على النموذج العام:

المعيار الذي تعتمد علية المربعات الصغرى في الحصول على المقدرات حيث يتطلب المعيار تصغير مجموع مربعات البواقي ألي أدنى قيمه لها. اختبار مقدرات تعطي مربعات بواقي تعطي أدنى مجموع من بين هذه المجاميع أي أن المعيار هو تصغير $\sum u_i^2$

الطريقة الأولى: بعد الكتابة المصفوفاتية للنموذج يمكن تقدير نموذج الانحدار المتعدد عن طريق العلاقة المصفوفاتية التالية :

$$\beta = a = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

الطريقة الثانية: تحويل مربعات البواقي ألي شكل تظهر فيه المقدرات المراد الحصول عليها ويمكن إعادة كتابة المعيار على النحو التالي:

$$\sum u_i^2 = \sum (Y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 X_1 .... \hat{a}_k X_k)^2$$

تفاضل البواقي بالنسبه لـ $\dot{a}_0$ ويساوى بالصفر ويعاد كذلك لقيم $\dot{a}_1, \dot{a}_2 \ldots \dot{a}_k$ وهكذا

$$\frac{\partial \sum u_i^2}{\partial \hat{a}_0} = +2\sum (Y_I - \hat{a}_1 X_1 - \hat{a}_2 X_2 .. \hat{a}_K X_K) = 0$$

$$\frac{\partial \sum u_i^2}{\partial \hat{a}_1} = -2\sum X_{I1}(Y_I - \hat{a}_0 - \hat{a}_2 X_2 - \hat{a}_3 X_3 .. \hat{a}_K X_K) = 0$$

.

.

$$\frac{\partial \sum u_i^2}{\partial \hat{a}_K} = -2\sum X_{IK}(Y_I - \hat{a}_0 - \hat{a}_2 X_2 - \hat{a}_3 X_3 .. \hat{a}_K X_K) = 0$$

بفك الأقواس والقسمة على 2 وإعادة كتابة المعادلات الطبيعية مقابلة للنموذج الخطي العام

$$Y_i = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + u_i$$

$$\sum u_i^2 = \sum (Y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 X_1 - \hat{a}_2 X_2)^2$$

نحصل على مقدرات النموذج العام وعلى سبيل المثال سنكتفي بنموذج بثلاث متغيرات

$$\sum Y_I = n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum X_{1i} + \hat{a}_2 \sum X_{2i}$$

$$\sum X_{1I} Y = \hat{a}_0 \sum X_{1I} + \hat{a}_1 \sum X_{1I}^2 + \hat{a}_2 \sum X_{1I} X_{2I}$$

$$\sum X_{2I} Y = \hat{a}_0 \sum X_{21I} + \hat{a}_1 \sum X_{1I} X_{2I} + \hat{a}_2 \sum X_{2I}^2$$

وباستخدام الانحرافات نتحصل على

$$\hat{a}_1 = \frac{(\sum x_1 y)(\sum x_2^2) - (\sum x_2 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{a}_2 = \frac{(\sum x_2 y)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{a}_0 = \bar{Y} - \hat{a}_1 \bar{X}_1 - \hat{a}_2 \bar{X}_2$$

Y	X_1	X_2	y	x_1	x_2	$x_1 y$	$x_2 y$	$x_1 x_2$	x_1^2	x_2^2
40	6	4	-17	-12	-8	204	136	96	144	64
44	10	4	-13	- 8	-8	104	104	64	64	64
46	12	5	-11	- 6	-7	66	77	42	36	49
48	14	7	- 9	- 4	-5	36	45	20	16	25
52	16	9	- 5	- 2	-3	10	15	6	4	9
58	18	12	+ 1	0	0	0	0	0	0	0
60	22	14	+ 3	+4	+2	12	6	8	16	4
68	24	20	+11	+6	+8	66	88	48	36	64
74	26	21	+17	+8	+9	136	153	72	64	81
80	32	24	+23	+14	+12	322	276	168	196	144
570	**180**	**120**	**0**		**0**	**956**	**900**	**524**	**576**	**504**

$$\dot{a}_1 = \frac{(\sum x_1 y)(\sum x_2^2) - (\sum x_2 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2} = \frac{(956)(504) - (900)(524)}{(576)(504) - (524)^2} = 0.65$$

$$\dot{a}_1 = \frac{(\sum x_2 y)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2} = \frac{(900)(576) - (956)(524)}{(576)(504) - (524)^2} = 1.11$$

$$\dot{a}_0 = \overline{Y} - \dot{a}_1 \overline{X}_1 - \dot{a}_2 \overline{X}_2 = 57 - (0.65)(18) - (1.11)(12) = 31.98$$

$$\dot{Y}_1 = 31.98 + 0.65X_{1i} + 1.10X_{2i} + u$$

اختبار الفرضيات :

لاختبار الفرضيات الخاص بمعالم النموذج المقدر نتحصل أولا على تباين المقدرات والذي يساوي:

$$V(\dot{a}_1) = \sigma^2 \frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$V(\dot{a}_2) = \sigma^2 \frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

تباين البواقي يساوي

$$\sigma^2 = \frac{\sum u_i^2}{n-k}$$

$$V(\dot{a}_1) = \frac{\sum u^2}{n-k} \frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$V(\dot{a}_2) = \frac{\sum u^2}{n-k} \frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$V(\hat{a}_1) = \frac{\sum u^2}{n-k} \frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2} = \frac{13.67}{10-3} \frac{504}{(576)(504) - (524)^2} = 0.06$$

$$V(\hat{a}_2) = \frac{\sum u^2}{n-k} \frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2} = \frac{13.67}{10-3} \frac{576}{(576)(504) - (524)^2} = 0.07$$

ويكون الانحراف المعياري كما يلي:

$$Se(\dot{a}_1) = \sqrt{V(\dot{a}_1)} = \sqrt{0.06} = 0.24$$
$$Se(\dot{a}_2) = \sqrt{V(\dot{a}_2)} = \sqrt{0.07} = 0.27$$

وباستخدام اختبار t لاختبار فرضية العدم والتي تفترض انه لا يوجد علاقة أي أن

$$H_0 : a_1 = 0$$
$$H_A : a_1 \neq 0$$

وكذلك

$$H_0 : a_2 = 0$$
$$H_A : a_2 \neq 0$$

الاختبار الإحصائي

$$t = \frac{\hat{a}_1 - 0}{Se(\hat{a}_1)} = \frac{0.65}{0.24} = 2.70$$
$$t = \frac{\hat{a}_2 - 0}{Se(\hat{a}_2)} = \frac{1.11}{0.27} = 4.27$$

درجة حرية وعند 5% مستوى معنوية والتي تساوي 7 الجد وليه مع t القيمة المحسوبة مع t وبمقارنة نرفض فرضية العدم ونستنتج وجود علاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة. t=2.365

جدول رقم (2)

	Y	X_1	X_2	$\dot{Y}$	u	u^2 $(Y-Y)^2$	y^2 $(Y-Y)^2$
1	40	6	4	40.32	-0.32	0.1024	289
2	44	10	4	42.92	1.08	1.1664	169
3	46	12	5	45.33	0.67	0.4489	121
4	48	14	7	48.85	-0.85	0.7225	81
5	52	16	9	52.37	-0.37	0.1369	25
6	58	18	12	57.00	+1.00	1.0000	1
7	60	22	14	61.82	-1.82	3.3124	9
8	68	24	20	69.78	-1.78	3.1684	121
9	74	26	21	72.19	+1.81	3.2761	289
10	80	32	24	79.42	+0.58	0.3364	529
					$\Sigma u=0$	$\Sigma u^2=13.67$	$\Sigma y^2=1634$

اختبار الفرضيات المركبة:

هي الفرضية التي تتكون من عدد من الافتراضات على سبيل المثال:

فرضية العدم: $Ho : a_1 = a_2 = \dots a_k$

الفرضية البديلة: فرضية العدم غير صحيحه.

أي أننا نختبر النموذج كله أي إن الانحدار كله غير صالح.

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 .. a_k X_k + u$$

أي أن النموذج قد يكون جيد وتفلح هذه المتغيرات في تفسير التغيرات التي تحدث في المتغير التابع ونرفض فرضية العدم او ان النموذج غير جيد و المتغيرات المفسرة لا تفلح في تفسير التغيرات التي تحدث في المتغير التابع. يمكن استخدام اختبار المركب وهو إذا كان النموذج يحوي متغيرين مفسرين أي نموذج من ثلاث متغيرات.

يجب التخلص من هذه المجموعة من المتغيرات المستقلة واستعمال مجموعه أخرى أكثر ملائمة لتفسير المتغير التابع Y ، أما هذه المجموعة ككل فانها لاتقوم بتفسير المتغير التابع Y . أما إذا رفضت فرضية العدم معناه أن النموذج صالح أي أن المتغيرات كمجموعه تلعب دور في تفسير المتغير التابع فيجب الاحتفاظ بهذه المجموعة. لا نعتمد فقط على الاختبارات المعنوية بل توجد اعتبارات أخرى تدخل إلى الصورة مثل معامل التحديد واختبار F لتحليل التباين.

$$t = \frac{\hat{a}_1 - a_2}{\sqrt{V(a_1) + V(a_2) - 2(Cov\, a_1, a_2)}}$$

<u>معامل الارتباط الجزئي:</u>

إذا تم شرح التغير في Y بمتغيرين X_1, X_2 فان معامل الارتباط r^2_{yx1} و r^2_{yx2} يقيس الجزء من التباين في Y الذي يمكن شرحه بالمتغير X_1 و المتغير X_2, أما R^2 فهي تشرح التغير في Y والذي يتم شرحه بالمتغيرات X_1, X_2 معا.

أما معاملات الارتباط الجزئي الارتباط بين المتغير التابع Y واحد المتغيرات المستقلة , X_1, X_2 حيث أن r_{yx1} تمثل الارتباط بين Y المتغير التابع والمتغير X_1 بافتراض ابتعاد تأثير X_2, لقياس الارتباط الجزئي نستخدم المعادلات التالية:

$$r_{yx1} = \frac{\sum x_1 y}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y^2}} = \frac{956}{\sqrt{576}\sqrt{1634}} = 0.9854$$

$$r_{yx2} = \frac{\sum x_2 y}{\sqrt{\sum x_{2i}^2}\sqrt{\sum y^2}} = \frac{900}{\sqrt{504}\sqrt{1634}} = 0.9917$$

$$r_{x1\ x1} = \frac{\sum x_2 x_1}{\sqrt{\sum x_{2i}^2}\sqrt{\sum x_1^2}} = \frac{524}{\sqrt{504}\sqrt{576}} = 0.9725$$

معامل التحديد: حيث تستعمل الصيغة التالية:

$$R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{\sum u_i^2}{\sum y_i^2}$$

ومن المثال الســـــابق تكون قيمة معامل التحديد كما يلي:

$$R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{SSR}{SSR} = 1 - \frac{\sum u_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{13.67}{1634} = 1 - 0.0084 = 0.9916 = 99.16\%$$

ولكن في الانحدار المتعدد عادة يفضل استخدام معامل التحديد المصحح وهو معطى بالقانون التالي

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k}\left(1 - R^2\right)$$

ويحبذ استعمال معامل التحديد المصحح للمقارنة بين نماذج الانحدار المختلفة ذات المتغير التابع. الواحد كما يلي:

$$\overline{R}_1^2 \qquad Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + u_1$$

$$\overline{R}_2^2 \qquad Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 \ldots a_k X_k + u_2$$

تحســـــب معامل التحديد المصحح للنموذجين أيهما أكبر يكون هو النموذج الأفضل. ويفضل استخدام معامل التحديد المصحح $\overline{R}^2$ وذلك لان معامل R_1^2 يتزايد بتزايد عدد المتغيرات المفسرة أي انه في نموذج الانحدار البســيط تكون $R_1^2=\overline{R}^2$ أما في نموذج الانحدار العام تكون $\overline{R}^2 \le R_1^2$

<u>**تحليل التباين في الانحدار المتعدد:**</u> يمكن الاعتماد على تحليل التباين باستخدام اختبار F والذي يعتمد على جدول تحليل التباين

التباين	مجموع المربعات	درجـــة الحرية	متوسط مج المربعات	اختبار F
مج مربعات الانحدار	$SSR = \sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2$	K-1	SSR/K-1	$F = \dfrac{SSR / K - 1}{SSE / n - k}$
مج مربعات البواقي	$SSE = \sum(\hat{Y}_t - Y_t)^2 = \sum u^2$	n-K	SSE/n-K	
مج مربعات الإجمالي	$SST = \sum(Y_t - \overline{Y})^2$	n-1	n-1	

لاختبار معنوية معالم النموذج نستخدم اختبار F بدرجة حرية k-1 و n-k

$$F = \frac{SSR / K - 1}{SSE / n - k}$$

بمقارنة القيمة المحسوبة مع القيمة الجد وليه والتي تساوي 4.74 عند 5% مستوى المعنوية ودرجات حرية 2 و 7 ونرفض فرضية العدم التي تفترض أن معالم النموذج تساوي صفر.

معيار معلومات اكيكا:The Akaika information criterion

طريقة لتحديد عدد المتغيرات المفسره وتعرف بالتالي:

$$AIC = \ln\left(\frac{\sum u_i^2}{n}\right) + \frac{2k}{n}$$

هذا معيار يستخدم لاضافة متغير فقط عندما تؤدي أضافة ذلك المتغير الى انخفاض قيمة AIC

وهي مثل معامل التحديد تعتمد على مجموع مربعات البواقي $\sum u^2$ وعدد المتغيرات k . ولكن أنخفاض مجموع المربعات الذي يحدث عند أضافة متغير مفسر لاتعني انخفاض قيمة AIC لأن أي أضافة تعني ارتفاع k عدد المتغيرات الذي يتم تقديره ومن ثم ارتفاع قيمة AIC. فأن AIC تنخفض فقط عندما يكون الانخفاض في مجموع مربعات البواقي فعال ويفوق تأثير ارتفاع K .

اختبار المتغيرات المضافة:

إذا كان هناك نظرية اقتصادية تعتمد على نموذج معين، النموذج يقول أن المتغير التابع المراد تفسيره يتأثر بعدد من المتغيرات المستقلة K

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + u_1$$

ونظرية أخرى تستخدم نموذج آخر يقول أن هذا النموذج ناقص وهناك متغيرات إضافية تؤثر على المتغير التابع كما يلي:

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + u_2$$

أي أن النظرية الثانية تضيف مجموعه أخرى إلى النموذج السابق.

نظريتين متعارضتين مثلا هناك نظرية الاستهلاك محددة بالدخل هذه نظرية الدخل الدائم . لكن هناك عوامل أخرى تؤثر على الاستهلاك مثل السعر والثروة والعادات، يمكن اختبار النموذجين كما يلي:

فرضية العدم: $Ho : a_3 = a_4 = .0$

الفرضية البديلة: فرضية العدم غير صحيحه.

المطلوب هو اختبار النظرية الثانية إذا رفضنا فرضية العدم معناه أن النموذج الثاني هو أفضل من النموذج الأول. النموذج الأول هو النموذج المقيد أي النموذج الذي يساوي فيه المعاملات $= a_3 = a_4$ الصفر فإذا قبلت فرضية العدم معناه أننا قبلنا النموذج الأول.

$$F = \frac{(SSE_R - SSE_u)_r}{SSE_u / n - k}$$

حيث تمثل SSE_U مجموع مربعات البواقي الغير مقيدة. SSE_R مجموع مربعات البواقي المقيدة. و r عدد القيود المفروضة على فرضية العدم.

اختبار مســـــاواة انحدارين :

أو يســـــمى التغير الهيكلي في النماذج، أو اختبار شـــــــاو قدرنا نموذج الانحدار في فترة معينة مع الانحدار في فترة زمنية أخرى.

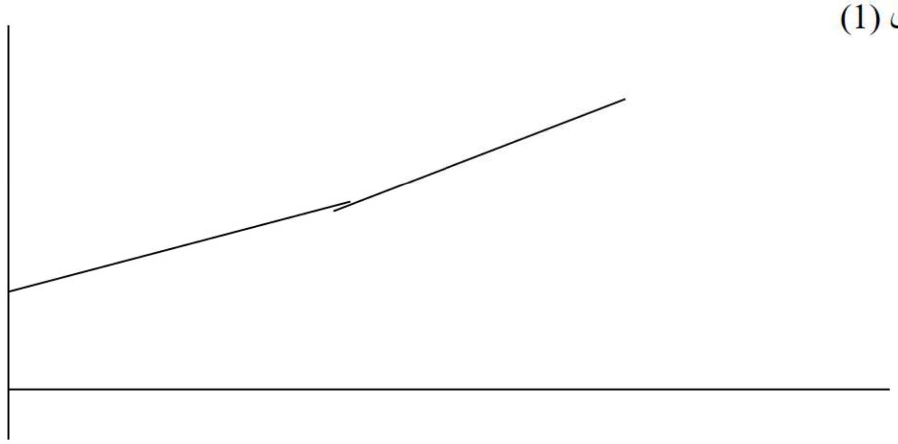
$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 . + u_2$$

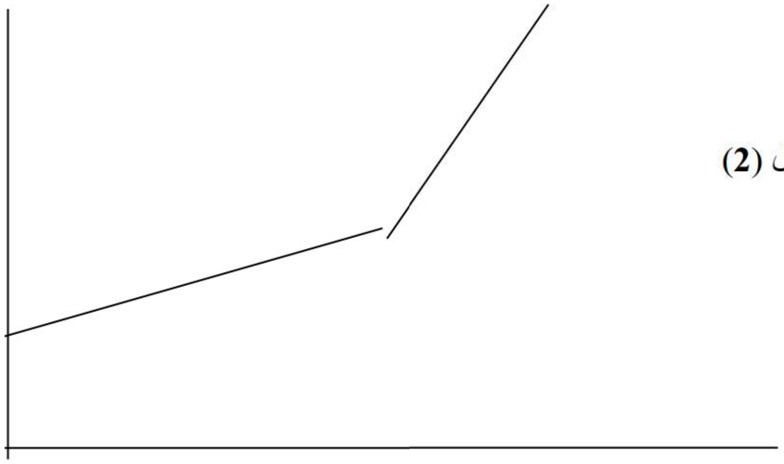
$$Y = \gamma_0 + \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3 + u_2$$

لاختبار ما إذا كان هناك اختلاف بين الفترة الأولى والفترة الثانية هل حدث تغيير في هذه المعالم أي أن الانحدار في الفترة الثانية يختلف عن الانحدار في الفترة الأولى أي يكون هناك اختلاف في معالم الانحدار

بين الفترتين إذا كان الاختلاف غير معنوي معناه أن نموذج الانحدار الأول صالح لكل الفترات مثلا قدرت نموذج الانحدار في فترة معينه.

الشـــــكل (1)





الشـــــكل (2)

في الشكل (1) يمكن أن يضاف النموذجين لان شكل الانحدار موحد. أما الشـــــكل (2) فيه اختلاف كبير بين الانحدار الأول والانحدار في الفترة الثانية فإذا دمج الانحدار ين سنتحصل على نموذج موحد لا يعطي معلومات صحيحه عن الفترة الأولى أو الفترة الثانية. على سبيل المثال الاستهلاك في فترة الطفرة يختلف عن ما بعد الطفرة أي أن هناك تغير هيكلي. لاختبار وجدود هذا التغير الهيكلي نستخدم فرضية العدم التالية

فرضية العدم:

$$H_0 : a_0 = \gamma_0$$
$$a_1 = \gamma_1$$
$$a_2 = \gamma_2$$
$$a_3 = \gamma_3$$

فرضية البديلة: فرضية العدم غير صحيحه.

فرضية العدم تقول أن النموذجين متساويين في المعالم وانه ليس هناك اختلاف بينهما أي لا يوجد تغيير هيكلي في الفترة الزمنية أما إذا كانت فرضية العدم غير صحيحه فانه يوجد اختلاف هيكلي بين الفترتين مما يحبذ استعمال نموذجين مختلفين.

الاختبار المحسوب

$$F = \frac{(SSE_1 - SSE_2)_k}{SSE_2 / n - k}$$

حيث تمثل SSE_2 مجموع مربعات البواقي الثاني. SSE_1 مجموع مربعات البواقي الأول. و k عدد المعالم المقيدة في فرضية العدم

تمارين محلولة في الانحدار الخطي المتعدد:

التمرين الأول:

خلال دراسة لمدى تأثير حجم الاستثمار X_1 على المبيعات Yi, سجلت النتائج في الجدول المقابل (بالمليون دينار).

المطلوب:

1- تقدير نموذج الانحدار مع ايجاد انحرافات المقدرات.
2- حساب معامل التحديد، مادا نستنتج؟
3- اختبار صلاحية النموذج من خلال جدول تحليل التباين.

اقترح أحد الباحثين النموذج الخطي المتعدد حيث X_2 تمثل النفقات الاعلانية:

4- تقدير نموذج الانحدار المتعدد.
5- ايجاد تباينات مقدرات النموذج.
6- اختبار معنوية تأثير المتغيرات المستقلة على المتغير التابع.
7- أنشئ جدول تحليل التباين مع التفسير.
8- من خلال هده الدراسة، ضع تفسيرا اقتصاديا يفيد المؤسسة.

X_2	X_1	Yi	n
6	80	32	1
4	100	50	2
10	115	62	3
12	110	56	4
8	70	8	5
20	125	80	6
16	105	62	7
15	90	50	8
91	795	400	المجموع

الحل:

1- **تقدير نموذج الانحدار:** تأثير حجم الاستثمار X_1 على المبيعات Yi

X_1	Y_i	$X_i-\bar{X}$	$Y_i-\bar{Y}$	$(X_i-\bar{X}).(Y_i-\bar{Y})$	$(X_i-\bar{X})^2$	$\hat{Y}$	$(Y_i-\hat{Y})^2$	$(Y_i-\bar{Y})^2$
80	32	-19.38	-18	348.75	375.39	28.19	14.52	324.00
100	50	0.63	0	0.00	0.39	50.70	0.49	0.00
115	62	15.63	12	187.50	244.14	67.59	31.24	144.00
110	56	10.63	6	63.75	112.89	61.96	35.53	36.00

70	8	-29.38	-42	1 233.75	862.89	16.93	79.80	1 764.00
125	80	25.63	30	768.75	656.64	78.85	1.33	900.00
105	62	5.63	12	67.50	31.64	56.33	32.13	144.00
90	50	-9.38	0	0.00	87.89	39.45	111.37	0.00
795	**400**	**0.00**	**0.00**	**2 670.00**	**2 371.88**	**400.00**	**306.40**	**3 312.00**

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})^2} \Longrightarrow \hat{a}_1 = \frac{2670}{2371,88} \Longrightarrow \hat{a}_1 = 1,125$$

$$\hat{a}_0 = \overline{Y} - \hat{a}_1 \overline{X} \Rightarrow \hat{a}_0 = 50 - (99,375 \,.\, 1,125) \Rightarrow \hat{a}_0 = -61,8656$$

$$\hat{Y} = 1,125\ \mathbf{X_1} - 61,8656$$

ايجاد انحرافات المقدرات:

$$\sigma_{\hat{a}_1} = \sqrt{\frac{\sum(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{(n-k)\sum(X_t - \overline{X})^2}} \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_1} = \sqrt{\frac{306,4}{(6).\ 2371,88}} \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_1} = 0,1467$$

$$\sigma_{\hat{a}_0} = \sqrt{\frac{\sum u_t^2}{(n-k)}\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum(X_t - \overline{X})^2}\right)} \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_0} = \sqrt{\frac{306,4}{(6)}\left(\frac{1}{8} + \frac{99,375^2}{2371,88}\right)} \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_0} = 14,7988$$

حساب معامل التحديد: $R^2 = \frac{SSR}{SST} \Rightarrow R^2 = \frac{3312 - 306,4}{3312} \Rightarrow R^2 = 0,9075$

الاستنتاج: حجم الاستثمار يفسِر 90,75 % من المبيعات، والباقي 9,25 % يمثله الخطأ العشوائي.

2- اختبار صلاحية النموذج من خلال جدول تحليل التباين: : (K *يمثل عدد المتغيرات =2*)

صياغة الفرضيات: $H_0 : a_1 = 0$, $H_1 : a_1 \neq 0$, $F_{0.05}^{1,6} = 5,99 < F = 58,86$

التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
مج مربعات الانحدار	$SSR=\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2=3005,6$	k-1=1	SSR/k-1=3005,6
مج مربعات البواقي	$SSE=\sum(\hat{Y}_t-Y_t)^2=306,4$	6 = n-k	SSE/(n-k)=306,4/6
مج مربعات إجمالي	$SST=\sum(Y_t-\overline{Y})^2=3312$	n-1	$F=\frac{3005,6}{306,4/6}$ = **58,86**

القرار: بمأن الاحصائية المحسوبة تقع في منطقة رفض H_0 فانه يتم قبول H_1 معناه أن $a_1 \neq 0$ و منه النموذج البسيط صالح للتنبؤ.

3- **تقدير نموذج الانحدار المتعدد:** $\widehat{a}=(X'X)^{-1}X'Y$

الكتابة المصفوفاتية للنموذج:

$$X=\begin{pmatrix}1&80&6\\1&100&4\\1&115&10\\1&110&12\\1&70&8\\1&125&20\\1&105&16\\1&90&15\end{pmatrix}\quad Y=\begin{pmatrix}32\\50\\62\\56\\8\\80\\62\\50\end{pmatrix}$$

$$X'=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\80&100&115&110&70&125&105&90\\6&4&10&12&8&20&16&15\end{pmatrix}$$

$$X'.X=\begin{pmatrix}8&795&91\\795&81375&9440\\91&9440&1241\end{pmatrix}\quad X'.Y=\begin{pmatrix}400\\42420\\5090\end{pmatrix}$$

$$(X'.X)^{-1}=\begin{pmatrix}4.48638717&-0.048199&0.037664\\-0.0481994&0.0006224&-0.001200\\0.03766437&-0.0012&0.007170\end{pmatrix}$$

$$\widehat{a}=(X'X)^{-1}X'Y=\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-58.353745\\1.01382633\\0.66854973\end{pmatrix}$$

$$\hat{Y}=1,0138\,X_1+0,6685\,X_2-58,3537$$

5- **ايجاد تباينات المقدرات:** Ω_a تمثل مصفوفة التباينات و التباينات المشتركة للمقدرات بحيث قطر هده المصفوفة يمثل التباينات.

$$\Omega_a=\frac{\sum u^2}{n-k-1}\cdot(X'X)^{-1}\quad\Rightarrow\Omega_a=\frac{244,07}{5}\,(X'X)^{-1}$$

$$\Omega_a = \begin{pmatrix} 218.995673 & -2.35277709 & 1.838525 \\ -2.35277709 & 0.03037924 & -0.0585635 \\ 1.838525 & -0.0585635 & 0.34999761 \end{pmatrix}$$

يتم حساب $\sum u^2 = (\hat{Y}-Y)^2 = 244,07$ باستعمال الجدول، حيث نحسب عمود $\hat{Y}$ للنموذج المتعدد.

Yi	X1	X2	u^2			a2	a1	a0	
32	80	6	27.42			0.6685497	1.014	-58.3537447	
50	100	4	18.46		S=	0.591606	0.174	14.7985024	
62	115	10	8.54		R^2=	0.9263083	6.987		Su=
56	110	12	26.93		F=	31.425132	5		
8	70	8	99.25			3067.9332	244.1		
80	125	20	3.05			SSR	SSE		
62	105	16	10.27		Pr	0.3097284	0.002	0.01092461	
50	90	15	50.14						
400	795	91	244.07	48.81					

$$V_{\hat{a}_0} = \frac{244,07}{5}4.4864 = 218,99 \text{ ، } V_{\hat{a}_1} = \frac{244,07}{5}0,006 = 0,0304 \text{ ، } V_{\hat{a}_2} = \frac{244,07}{5}0,0072 = 0,3499$$

6- **اختبار المعنوية:** من خلال المتراجحة التالية, نستنتج أن حجم الاستثمار مفسِر للمبيعات, لكنّ النفقات الاعلانية غير مفسِرة.

$$t_{a2} = \frac{\hat{a}_2 - a_2}{\sigma_{\hat{a}_2}} \Rightarrow t_{a2} = \frac{0,668-0}{\sqrt{0,3499}} = 1,13 < t^{5}_{0.975} = 2,5706 < t_{a1} = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\sigma_{\hat{a}_1}} \Rightarrow t_{a1} = \frac{1,0138-0}{\sqrt{0,0304}} = 5,816$$

الاستنتاج: نلاحظ أن المتغير X_1 حجم الاستثمار يؤثر على Y المبيعات , بينما المتغير X_2 نفقات اعلانية لا يؤثر على Y المبيعات , اذن النموذج غير مقبول للتنبؤ, ولهذا يجب إعادة تقدير نموذج جديد بدون المتغير X_2 (مما يعني اعتماد النموذج المقدر الأول البسيط)

7- **جدول تحليل التباين للنموذج المتعدد:** (*K يمثل عدد المتغيرات المستقلة فقط*)

صياغة الفرضيات: $H_0 : a_1 = a_2 = 0$ ، $H_1 : (a_1, a_2) \neq 0$, $F^{2,5}_{0.05} = 5,79 < F = 31.42$

التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
مج مربعات الانحدار	$SSR = \sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2 = 3067.93$	k=2	SSR/k= 1533.965
مج مربعات البواقي	$SSE = \sum(\hat{Y}_t - Y_t)^2 = 244.06$	5 = n-k-1	SSE/(n-k-1)= 244.06 /5
مج مربعات إجمالي	$SST = \sum(Y_t - \overline{Y})^2 = 3312$	n-1	$F = \frac{1533.965}{244.06/5} = 31.42$

القرار: بمأن الاحصائية المحسوبة تقع في منطقة رفض H_0 فانه يتم قبول H_1 معناه أن هناك على الأقل متغير واحد يؤثر في المبيعات (لا يمكن تحديد المتغير الا بإجراء اختبار ستودنت) و منه النموذج المتعدد مقبول عموما لكن لا يمكن الاعتماد عليه, حيث يجب الاعتماد على نتيجة اختبار ستودنت t لأنها تعطي نتائج بالنسبة لكل متغير على حدى. وبالتالي علينا الرجوع الى النموذج الأول البسيط باعتباره معنوي احصائيا.

$$\hat{Y}=1,125\ X_1 - 61,8656$$

8- **التفسير اقتصادي:** على المؤسسة تغيير سياسة نفقاتها الاعلانية باعتبارها لا تؤثر على المبيعات.

التمرين الثاني:

باعتبار المتغيرات التالية ممركزة، لدينا المصفوفة المقابلة للتباينات والتباينات المشتركة للمتغيرات.

المطلوب: - قدر معلمات النموذج.

	Y	X1	X2
Y	25	16,1	-1,4
X1		23,8	5,5
X2			10

Y	10	12	14	15	17	20	22	24	26	20
X1	10	14	17	20	21	25	14	26	21	22
X2	13	15	14	22	20	20	14	13	15	14

الحل:

NB : Le calcul de l'inverse d'une matrice carrée de dimension 2 se fait de la façon suivante : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

- ***Solution***

1) Lorsque les variables de départ sont centrées,

$$\frac{1}{n}X'X = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_1,X_2) & Var(X_2) \end{bmatrix} \text{ et } \frac{1}{n}X'Y = \begin{bmatrix} Cov(Y,X_1) \\ Cov(Y,X_2) \end{bmatrix};$$

par conséquent, comme $\hat{a} = (X'Y)^{-1}X'Y = \left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}X'Y\right)$, alors :

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_1,X_2) & Var(X_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Cov(Y,X_1) \\ Cov(Y,X_2) \end{bmatrix}$$

La connaissance des variances de variables et de leurs covariances permet donc de calculer â.

Ici :

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 23.8 & 5.5 \\ 5.5 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16.1 \\ -1.4 \end{bmatrix} = \frac{1}{(23.8)(10)-(5.5)^2} \begin{bmatrix} 10 & -5.5 \\ -5.5 & 23.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16.1 \\ -1.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8120 \\ -0.5866 \end{bmatrix}$$

La connaissance des variances de variables et de leurs covariances permet donc de calculer $\hat{a}$.

Ici :

$$\hat{a}=\begin{bmatrix} 23.8 & 5.5 \\ 5.5 & 10 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 16.1 \\ -1.4 \end{bmatrix}=\frac{1}{(23.8)(10)-(5.5)^2}\begin{bmatrix} 10 & -5.5 \\ -5.5 & 23.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16.1 \\ -1.4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.8120 \\ -0.5866 \end{bmatrix}$$

Soit $\hat{a}_1 = 0.81$ et $\hat{a}_2 = -0.59$. On déduit de ces valeurs la valeur de $\hat{a}_3$:

$$\hat{a}_3 = \overline{y} - \hat{a}_1\,\overline{x}_1 - \hat{a}_2\,\overline{x}_2 = 18 - (0.81)(19) - (-0.59)*16 = 11.96$$

2) Le coefficient de détermination R^2 est défini ainsi :

$$R^2 = \frac{\text{Variance expliquée}}{\text{Variance totale}} = \frac{Var(X\hat{a})}{Var(Y)} = \frac{\frac{1}{n}(X\hat{a})'(X\hat{a})}{\frac{1}{n}Y'Y} = \frac{(\hat{a})'X'X\hat{a}}{Y'Y}$$

Comme $(X'X)^{-1}X'Y = \left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}X'Y\right)$, on obtient :

$$R^2 = \frac{(\hat{a})'X'X(X'X)^{-1}X'Y}{Y'Y} = \frac{(\hat{a})'X'Y}{Y'Y},$$

soit finalement, comme $X'Y = n\begin{bmatrix} Cov(Y,X_1) \\ Cov(Y,X_2) \end{bmatrix}$,

$$(\hat{a})'X'Y = (10)\begin{bmatrix} 0.8120 & -0.5866 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16.1 \\ -1.4 \end{bmatrix} = 138.94 \text{ et}$$

$Y'Y = nVar(Y) = 250$, $R^2 = 0.55$.

3) Le tableau d'analyse de la variance s'écrit :

Source de variation	**Somme des carrés**	**Degrés de liberté**	**Ratio**
Expliquée	$SCE = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \overline{y})^2$	$p-1$	$\frac{SCE}{p-1}$
Résiduelle	$SCR = \sum_{i=1}^{n}(\hat{u}_i)^2$	$n-p$	$\frac{SCR}{n-p}$
Totale	$SCT = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$	$n-1$	$F = \frac{\frac{SCE}{p-1}}{\frac{SCR}{n-p}}$

الطريقة الثانية:

y	x1	x2
10	10	13
12	14	15
14	17	14
15	20	22
17	21	20
20	25	20
22	14	14
24	26	13
26	21	15
20	22	14

$$x=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 10 & 13 \\ 1 & 14 & 15 \\ 1 & 17 & 14 \\ 1 & 20 & 22 \\ 1 & 21 & 20 \\ 1 & 25 & 20 \\ 1 & 14 & 14 \\ 1 & 26 & 13 \\ 1 & 21 & 15 \\ 1 & 22 & 14 \end{array}\right| \qquad y=\left|\begin{array}{c} 10 \\ 12 \\ 14 \\ 15 \\ 17 \\ 20 \\ 22 \\ 24 \\ 26 \\ 20 \end{array}\right|$$

$$x'=\left|\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 14 & 17 & 20 & 21 & 25 & 14 & 26 & 21 & 22 \\ 13 & 15 & 14 & 22 & 20 & 20 & 14 & 13 & 15 & 14 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{cc} 190 & 160 \\ 3848 & 3095 \\ 3095 & 2660 \end{array} \qquad x'y= \begin{array}{c} 180 \\ 3581 \\ 2866 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} -0{,}04909747 & -0{,}13299639 \\ 0{,}00481348 & -0{,}00264741 \\ -0{,}00264741 & 0{,}01145608 \end{array} \qquad (x'x^{-1}).(x'y)= a\hat{} = \left|\begin{array}{c} 11{,}9572563 \\ 0{,}81203369 \\ -0{,}58661853 \end{array}\right|$$

$$\Omega_a = \frac{\sum u^2}{n-k-1}\cdot (X'X)^{-1} \Rightarrow \Omega_a = \frac{111{,}05}{7}\,(X'X)^{-1} = \left|\begin{array}{ccc} 50{,}143 & & \\ & 0{,}0763 & \\ & & 0{,}1817 \end{array}\right|$$

y^	(yi-y^)²
12,45	6,01
14,53	6,38
17,55	12,60
15,29	0,09
17,28	0,08
20,53	0,28
15,11	47,43
25,44	2,09
20,21	33,52
21,61	2,59
180,00	**111,05**
	SSE

التمرين الثالث:

في دراسة لنماذج الترويج سجلت نسبة التجهيز لأحد المنتجات Y_t في دولة معينة خلال الفترة 1989-2007 كما يلي:

السنوات t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
نسبة التجهيز Y_t	34.7	51	71.3	95.8	124	155.6	190.1	226.9	265.4	305	345.2	385.3	424.8	463.3	500.1	534.9	567.3	597	623.9

تأكدنا من خلال المنحنى أن المعلومات تخضع لنموذج لوجيستي من الشكل: $y_t = \dfrac{y_{\max}}{1 + br^t}$

بافتراض أن نسبة التجهيز القصوى هي $Y_{Max}=800$، قدر معلمات النموذج b و r ; مع العلم أنه اذا كان:

$$K = Ln((Y_{Max}/Y_t)-1)$$

فان: $\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(K_i-\bar{K}) = -126{,}377$ وأن: $\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2 = 570$

الحل:

نقوم بتحويل النموذج اللوجستي الى نموذج خطي باستعمال اللوغاريتم وذلك لتسهيل الحل:

$$Y_t = \frac{Y_{Max}}{1+br^t} \Rightarrow br^t = (Y_{Max}/Y_t)-1 \Rightarrow Lnbr^t = Ln((Y_{Max}/Y_t)-1) \Rightarrow Lnb + t.\ Lnr = Ln((Y_{Max}/Y_t)-1)$$

نضع: $Lnr = a_1$ و $Lnb = a_0$ و $K = Ln((Y_{Max}/Y_t)-1)$

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(t_i-\bar{t})(K_i-\bar{K})}{\sum_{t=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2} \Rightarrow \hat{a}_1 = \frac{126{,}377}{570} \Rightarrow \hat{a}_1 = -0{,}222$$

$$\hat{a}_0 = \bar{K} - \hat{a}_1\bar{t} \quad \& \quad \bar{K} = 0{,}629 \quad \& \quad \bar{t} = 10 \Rightarrow \hat{a}_0 = 2{,}846$$

$$\hat{a}_1 = -0{,}222 \Rightarrow r = 0{,}801 \ \& \quad \hat{a}_0 = 2{,}846 \Rightarrow b = 17{,}221$$

$$\Rightarrow Y_t = \frac{800}{1+17{,}22\times 0{,}801^t}$$

التمرين الرابع:

خلال دراسة لمدى تأثير حجم الاستثمار X_1 على المبيعات Yi,
سجلت النتائج في الجدول المقابل (بالمليون دينار).

n	Yi	X_1	X_2
1	32	80	6
2	50	100	4
3	62	115	10
4	56	110	12
5	8	70	8
6	80	125	20
7	62	105	16
8	50	90	15
المجموع	400	795	91

المطلوب:

1- تقدير نموذج الانحدار مع ايجاد انحرافات المقدرات.
2- حساب معامل التحديد, مادا نستنتج؟
3- اختبار صلاحية النموذج من خلال جدول تحليل التباين.

اقترح أحد الباحثين النموذج الخطي المتعدد التالي حيث X_2 تمثل النفقات الاعلانية:

$$\hat{Y} = 1.0138X_1 + 0.668X_2 - 58.353$$

فادا علمت أن مجموع مربعات الخطأ العشوائي: $\sum u^2 = 244.07$

4- أوجد تباينات مقدرات النموذج, باعتبار المصفوفة المقابلة.

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 4.4864 & -0.0482 & 0.0377 \\ -0.0482 & 0.0006 & -0.0012 \\ 0.0377 & -0.0012 & 0.0072 \end{bmatrix}$$

5- اختبار معنوية تأثير المتغيرات المستقلة على المتغير التابع.
6- من خلال هده الدراسة, ضع تفسيرا اقتصاديا يفيد المؤسسة.

<u>الحل:</u>

4- <u>تقدير نموذج الانحدار</u>: تأثير حجم الاستثمار X_1 على المبيعات Yi

X_1	Yi	$X_i-\bar{X}$	$Y_i-\bar{Y}$	$(X_i-\bar{X}).(Y_i-\bar{Y})$	$(X_i-\bar{X})^2$	$\hat{Y}$	$(Y_i-\hat{Y})^2$	$(Y_i-\bar{Y})^2$
80	32	-19.38	-18	348.75	375.39	28.19	14.52	324.00
100	50	0.63	0	0.00	0.39	50.70	0.49	0.00
115	62	15.63	12	187.50	244.14	67.59	31.24	144.00
110	56	10.63	6	63.75	112.89	61.96	35.53	36.00
70	8	-29.38	-42	1 233.75	862.89	16.93	79.80	1 764.00
125	80	25.63	30	768.75	656.64	78.85	1.33	900.00
105	62	5.63	12	67.50	31.64	56.33	32.13	144.00
90	50	-9.38	0	0.00	87.89	39.45	111.37	0.00
795	**400**	**0.00**	**0.00**	**2 670.00**	**2 371.88**	**400.00**	**306.40**	**3 312.00**

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})^2} \Rightarrow \hat{a}_1 = \frac{2670}{2371,88} \Rightarrow \hat{a}_1 = 1,125$$

$$\hat{a}_0 = \overline{Y} - \hat{a}_1 \overline{X} \quad \Rightarrow \hat{a}_0 = 50 - (99,375\ .\ 1,125) \quad \Rightarrow \hat{a}_0 = 61,8656$$

ايجاد انحرافات المقدرات:

$$\sigma_{\hat{a}_1} = \sqrt{\frac{\sum(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{(n-k)\sum(X_t - \overline{X})^2}} \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_1} = \sqrt{\frac{306,4}{(6).\ 2371,88}} \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_1} = 0,1467$$

$$\sigma_{\hat{a}_0} = \sqrt{\frac{\sum u_t^2}{(n-k)}(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum(X_t - \overline{X})^2})} \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_0} = \sqrt{\frac{306,4}{(6)}(\frac{1}{8} + \frac{99,375^2}{2371,88})} \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_0} = 14,7988$$

2 حساب معامل التحديد:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \Rightarrow R^2 = \frac{3312 - 306,4}{3312} \Rightarrow R^2 = 0,9075$$

الاستنتاج: حجم الاستثمار يفسِر 90,75 % من المبيعات, والباقي 9,25 % يمثله الخطأ العشوائي.

1- اختبار صلاحية النموذج من خلال جدول تحليل التباين:

صياغة الفرضيات: $H_0 : a_1 = 0$, $H_1 : a_1 \neq 0$

$$F_{0.05}^{1,6} = 5,99 < F = 58,86$$

التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
مج مربعات الانحدار	$SSR = \sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2 = 3005,6$	k-1=1	SSR/k-1=3005,6
مج مربعات البواقي	$SSE = \sum(\hat{Y}_t - Y_t)^2 = 306,4$	n-k =6	SSE/(n-k)=306,4/6
مج مربعات إجمالي	$SST = \sum(Y_t - \overline{Y})^2 = 3312$	n-1	$F = \frac{3005,6}{306,4/6} = \mathbf{58,86}$

القرار: بمأن الاحصائية المحسوبة تقع في منطقة رفض H_0 فانه يتم قبول H_1 معناه أن $a_1 \neq 0$ و منه النموذج صالح للتنبؤ.

2- ايجاد تباينات مقدرات النموذج: Ω_a تمثل مصفوفة التباينات و التباينات المشتركة للمقدرات بحيث قطر هده المصفوفة يمثل التباينات

$$\Omega_a = \frac{\sum u^2}{n-k-1}\ .\ (X'X)^{-1} \quad \Rightarrow \Omega_a = \frac{244,07}{5}\ (X'X)^{-1}$$

$$, V_{\hat{a}_0} = \frac{244,07}{5} 4.4864 = 218,99\ V_{\hat{a}_1} = \frac{244,07}{5} 0,006 = 0,0304\ , V_{\hat{a}_2} = \frac{244,07}{5} 0,0072 = 0,3499$$

3- اختبار المعنوية: من خلال المتراجحة التالية, نستنتج أن حجم الاستثمار مفسِر للمبيعات, لكنّ النفقات الاعلانية غير مفسِرة.

$$t_{a2}=\frac{\hat{a}_2-a_2}{\sigma_{\hat{a}_2}}\Rightarrow t_{a2}=\frac{0{,}668-0}{\sqrt{0{,}3499}}=1{,}13 \; < \; t^{5}_{0.975}=2{,}5706 \; < \; t_{a1}=\frac{\hat{a}_1-a_1}{\sigma_{\hat{a}_1}}\Rightarrow t_{a1}=\frac{1{,}0138-0}{\sqrt{0{,}0304}}=5{,}816$$

الاستنتاج: على المؤسسة تغيير سياسة نفقاتها الاعلانية باعتبارها لا تؤثر على المبيعات.

Yi	X1	X2	u^2	
32	80	6	27,42	
50	100	4	18,46	
62	115	10	8,54	
56	110	12	26,93	
8	70	8	99,25	
80	125	20	3,05	
62	105	16	10,27	
50	90	15	50,14	
400	795	91	244,07	48,81

	a2	a1	a0	
	0,66854973	1,01382633	-58,3537447	
s=	0,59160596	0,17429641	14,7985024	
R^2=	0,92630832	6,9866565		Su=
F=	31,4251322	5		
	3067,93315	244,066846		
	SSR	SSE		
Pr	0,30972835	0,00212019	0,01092461	

X			Y
1	80,00	6,00	32,00
1	100,00	4,00	50,00
1	115,00	10,00	62,00
1	110,00	12,00	56,00
1	70,00	8,00	8,00
1	125,00	20,00	80,00
1	105,00	16,00	62,00
1	90,00	15,00	50,00

X¨

1	1	1	1	1	1	1	1
80	100	115	110	70	125	105	90
6	4	10	12	8	20	16	15

X¨ *Y		invers(X¨ *X) *(X¨ *Y)		
400	a0	-58,3537447	14,7985024	-3,9432196

42420	a=	a1	1,01382633	Sa=	0,17429641	t=	5,81667928
5090		a2	0,66854973		0,59160596		1,13005915

X¨ *X

8	795	91
795	81375	9440
91	9440	1241

invers X¨ *X

4,486387	-0,0481994	0,0376644
-0,048199	0,00062235	-0,0012
0,037664	-0,0011997	0,0071701

var/covar

218,995673	-2,35277709	1,838525
-2,35277709	0,03037924	-0,0585635
1,838525	-0,0585635	0,34999761

t_{tab}= 2,5706

0.975;5

التمرين الخامس:

قامت وكالة عقارية بجمع البيانات المقابلة, حيث تبين أسعار محلات تجارية Yi (بالمليون دينار) حسب: مساحتها X_1 (بالمتر المربع) وعمر بنائها X_2 سنويا.

X_2	X_1	Yi
10	40	80
20	80	80
5	60	120
5	20	40
10	45	50
15	90	90
20	100	90
5	110	140

المطلوب:

1- تقدير نموذج انحدار
2- اختبار معنوية المقدرات مع حساب معامل التحديد، مادا نستنتج؟
3- اختبار صلاحية النموذج من خلال جدول تحليل التباين.

بعد إضافة X_2 (عمر بناء المحل). تحصَلنا على النَموذج الخطَي المتعدد التَالي:

$$\hat{Y} = 1.006\, X_1 - 2.905\, X_2 + 50.379$$

(القيَم تحت المقدَرات تمثَل انحرافاتها) **0.235** **1.168**

5- شرح هده المعادلة اقتصاديا.
6- اختبار معنوية تأثير المتغيرات المستقلة على المتغير التابع.
7- حساب معامل التحديد المصحَح، مادا نستنتج؟ مع العلم أنَ مجموع مربعات الخطأ العشوائي:

$$\sum e^2 = 318.65$$

8- ضع تفسيرا اقتصاديا يفيد الوكالة، مع التفضيل بين النموذجين. هل يمكن اقتراح نموذج أفضل؟

الحل:

1-تقدير نموذج الانحدار:

Xi	Yi	$Xi-\overline{X}$	$Yi-\overline{y}$	$(Xi-\overline{X})x(Yi-\overline{y})$	$(Xi-\overline{X})^2$	$\hat{Y}_t$	$(Yi-\hat{Y}_t)^2$	$(Yi-\overline{y})^2$
40	80	-28,13	-6	175,78	791,02	65,07	222,825622	39,0625
80	80	11,88	-6	-74,22	141,02	95,19	230,783057	39,0625
60	120	-8,13	34	-274,22	66,02	80,13	1589,44942	1 139,0625
20	40	-48,13	-46	2 225,78	2 316,02	50,01	100,264375	2 139,0625
45	50	-23,13	-36	838,28	534,77	68,84	354,852028	1 314,0625
90	90	21,88	4	82,03	478,52	102,72	161,830664	14,0625
100	90	31,88	4	119,53	1 016,02	110,25	410,102626	14,0625
110	140	41,88	54	2 250,78	1 753,52	117,78	493,6967	2 889,0625
545	690	0,00	0,00	5 343,75	7 096,88	690,00	3 563,80	7 587,50
68	86						**SSE**	**SST**

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})(Y_t-\overline{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})^2} \Longrightarrow \hat{a}_1 = \frac{5343,75}{7096,88} \Longrightarrow \hat{a}_1 = 0,75$$

$$\hat{a}_0 = \overline{Y} - \hat{a}_1\overline{X} \Rightarrow \hat{a}_0 = 86-(0,75\ .\ 68) \Rightarrow \hat{a}_0 = 34,95$$

النموذج المقدر: $\hat{Y}_t = \mathbf{0.75\ X + 34.95}$

ايجاد انحرافات المقدرات:

$$\sigma_{\hat{a}_1} = \sqrt{\frac{\sum(Y_t-\hat{Y}_t)^2}{(n-k)\sum(X_t-\overline{X})^2}} \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_1} = \sqrt{\frac{3563,8}{(6).\ 7096,88}} \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_1} = 0,289$$

$$\sigma_{\hat{a}_0} = \sqrt{\frac{\sum u_t^2}{(n-k)}\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{\sum(X_t-\overline{X})^2}\right)} \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_0} = \sqrt{\frac{3563,8}{(6)}\left(\frac{1}{8}+\frac{68^2}{7096,88}\right)} \Rightarrow \sigma_{\hat{a}_0} = 21,51$$

3 **اختبار المعنوية**

$$t_{0.975}^{6} = 2,44 < \quad t_{a1} = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\sigma_{\hat{a}_1}} \Rightarrow t_{a1} = \frac{0,75-0}{0,289} = 2,59$$

- اذن مساحة المحل تؤثر على السعر.

حساب معامل التحديد:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \Rightarrow R^2 = \frac{7587,5-3563,8}{7587,5} \Rightarrow R^2 = 0,53$$

الاستنتاج: مساحة المحل تفسر 53 % من السعر، والباقي 47 % يمثله الخطأ العشوائي, و هذا يعتبر غير

كافي لقبول النموذج.

4- اختبار صلاحية النموذج من خلال جدول تحليل التباين:

صياغة الفرضيات: $H_0: a_1 = 0$ ، $H_1: a_1 \neq 0$, $F_{0.05}^{1,6} = 5,99 < F = 6,77$

التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
مج مربعات الانحدار	$SSR = \sum(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2 = 4023,7$	k-1=1	SSR/k-1= 4023,7
مج مربعات البواقي	$SSE = \sum(\hat{Y}_t - Y_t)^2 = 3563,8$	n-k =6	SSE/(n-k)=3563,8/6
مج مربعات إجمالي	$SST = \sum(Y_t - \overline{Y})^2 = 7587,5$	n-1	$F = \frac{4023,7}{/6} = \mathbf{6,77}$

القرار: بمأن الاحصائية المحسوبة تقع في منطقة رفض H_0 فانه يتم قبول H_1 معناه أن النموذج صالح للتنبؤ.

4- شرح المعادلة: $\hat{Y}_t = 1.006 X_1 - 2.905 X_2 + 50.379$

مساحة المحل تؤثر على السعر إيجابيا بمعدل 1.006 أما عمر المحل يؤثر عليه سلبيا بمعدل -2.905 أما الحد الثابت 50.379 فيمثل سعر المحل عندما ينعدم العمر والمساحة مثل بعض التكاليف الادارية.

5- اختبار المعنوية: من خلال المتراجحة التالية, نستنتج أن مساحة المحل مفسِرة لسعره, لكنَّ العمر غير مفسِر.

$$t_{a1} = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\sigma_{\hat{a}_1}} \Rightarrow t_{a1} = \frac{1,006 - 0}{0.235} = 4.28 \quad > \quad t_{0.975}^{5} = 2.5706 \quad <$$

$$t_{a2} = \frac{\hat{a}_2 - a_2}{\sigma_{\hat{a}_2}} \Rightarrow t_{a2} = \frac{-2.905 - 0}{1.168} = -2.49$$

-حساب معامل التحديد المصحح:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \Rightarrow R^2 = \frac{5994.24}{7587,5} \Rightarrow R^2 = 0,79 \Rightarrow \overline{R^2} = 1 - \left[\frac{n-1}{n-k-1}(1-R^2)\right]$$

$\overline{R^2} = 0.706$ رغم حساب معامل التحديد المصحح الى أن نسبته تعتبر غير صحيحة و هدا لأن النموذج يحتوي على متغير غير مفسِر.

7- بمأن مساحة المحل مفسِرة لسعره، والعمر غير مفسِر له، اذن يتم اختيار النموذج الأول البسيط لكن يجب إضافة متغيرات أخرى مفسِرة ليبلغ معامل التحديد نسبة أكثر من 70%.

نفس التمرين:

قامت وكالة عقارية بجمع البيانات المقابلة, حيث تبين أسعار محلات تجارية Y_i (بالمليون دينار) حسب: مساحتها X_1 (بالمتر المربع) وعمر بنائها X_2 سنويا.

X_2	X_1	Yi
10	40	80
20	80	80
5	60	120
5	20	40
10	45	50
15	90	90
20	100	90
5	110	140

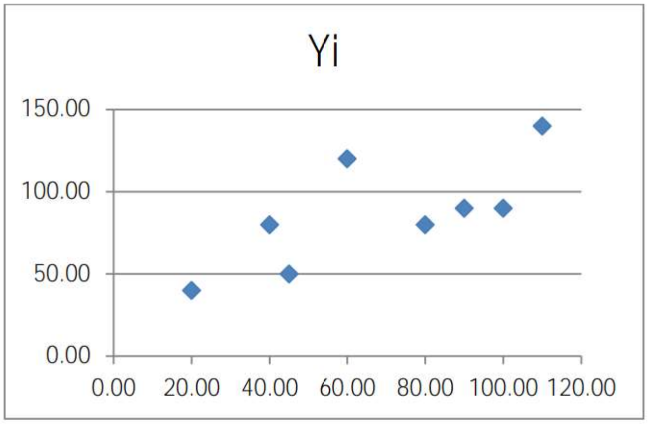
المطلوب:

1- تقدير نموذج انحدار السعر على مساحة المحل مع ايجاد انحرافات المقدرات.
2- اختبار معنوية المقدرات مع حساب معامل التحديد، مادا نستنتج؟
3- اختبار صلاحية النموذج من خلال جدول تحليل التباين.

بعد إضافة X_2 (عمر بناء المحل). تحصَلنا على النَموذج الخطَي المتعدد التَالي:

4- تقدير نموذج الانحدار المتعدد.

حل التمرين:



Xi	Yi	Xi –X̄	Yi –Ȳ	(Xi – X̄)*(Yi –Ȳ)	(Xi –X̄)²	y^	(Yi –Y^)²	(Yi –Ȳ)²
40	80	-28,13	-6	175,78	791,02	65,07	222,83	39,06
80	80	11,88	-6	-74,22	141,02	95,19	230,78	39,06
60	120	-8,13	34	-274,22	66,02	80,13	1589,45	1139,06
20	40	-48,13	-46	2 225,78	2316,02	50,01	100,26	2139,06
45	50	-23,13	-36	838,28	534,77	68,84	354,85	1314,06
90	90	21,88	4	82,03	478,52	102,72	161,83	14,06
100	90	31,88	4	119,53	1016,02	110,25	410,10	14,06
110	140	41,88	54	2 250,78	1753,52	117,78	493,70	2889,06
545	690	0,00	0,00	5 343,75	7096,88	690,00	3563,80	7587,50
68,1250	86,2500						**SSE**	**SST**

	a1	a0	
	0,75297	34,95376	
s=	0,28930	21,50981	
R^2=	0,53031	24,37145	Su=
F=	6,77427	6	
	4 023,69551	3 563,80449	
	SSR	**SSE**	

		593,9674	**Vu=**	**Su=**	24,3714
a1=	0,7530	0,0837	**Va1=**	**Sa1=**	0,2893
a0=	34,9538	462,6721	**Va0=**	**Sa0=**	21,5098

ta1= 2,602742741

t tab= 2,447
0.975;6

Yi	X1	X2	u^2	
80	40	10	339,26	
80	80	20	52,09	
120	60	5	565,07	
40	20	5	255,36	
50	45	10	275,96	
90	90	15	54,29	
90	100	20	8,45	
140	110	5	42,77	
690	545	90	1 593,26	318,65

X

1	40,00	10,00
1	80,00	20,00
1	60,00	5,00
1	20,00	5,00
1	45,00	10,00
1	90,00	15,00
1	100,00	20,00
1	110,00	5,00

Y

80,00
80,00
120,00
40,00
50,00
90,00
90,00
140,00

X'

1	1	1	1	1	1	1	1
40	80	60	20	45	90	100	110
10	20	5	5	10	15	20	5

$(X'X)$				$(X'X)^{-1}$			
	8	545	90		0,899698	-0,0076169	-0,022738
	545	44225	6750		-0,007617	0,00017345	-0,000373
	90	6750	1300		-0,022738	-0,0003733	0,0042817

var/covar | **t tab=** 2,5706

0.975;5

286,689792	-2,42713068	-7,24534555
-2,42713068	0,05527129	-0,11895343
-7,24534555	-0,11895343	1,36435985

$X'Y$		**a=**		$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y$		**Sa=**		t=	
	690		a0		50,3789593		16,9319164		2,97538437
	52350		a1		1,00622172		0,23509847		4,28000106
	7550		a2		-2,90469457		1,16805815		-2,48677223

	a2	a1	a0	
	-2,90469457	1,00622172	50,3789593	
s=	1,16805815	0,23509847	16,9319164	
R^2=	0,7900158	17,8507988		Su=
F=	9,40565787	5		
	5994,24491	1593,25509		
	SSR	SSE		
Pr	0,05537959	0,0078635	0,03096421	

التمرين السادس:

في دراسة لمدى تأثير الإعلان X_1 على المبيعات Yi, سجلت النتائج في الجدول المقابل (بالمليون دينار).

المطلوب:

1- تقدير نموذج الانحدار. مع علم أن: $\sum_{t=1}^{n}(x_t-\bar{x})(y_t-\bar{y}) = 1287$ وأن:

$$\sum_{t=1}^{n}(x_t-\bar{x})^2 = 989,50$$

2- إيجاد انحرافات المقدرات.

3- حساب معامل التحديد، مادا نستنتج؟

4- اختبار صلاحية النموذج.

المبيعات	الإعلان
164	34
178	36
151	32
145	29
173	45
201	67

5- في حالة إضافة متغير مستقل ثاني وعلمت أن تباين الخطأ العشوائي يساوي 58,3 وقد تم حساب المصفوفة $(X'X)^{-1}$ كما يلي:

$$(X'X)^{-1} = \begin{vmatrix} 4.4864 & -0.0482 & 0.0377 \\ -0.0482 & 0.0006 & -0.0012 \\ 0.0377 & -0.0012 & 0.0072 \end{vmatrix}$$

أوجد تباينات المقدرات لنموذج الانحدار المتعدد.

الحل:

x	y						y chapo	y-y chapo
34	164	-6,50	-4,67	30,33	42,25	21,78	160,212397	14,3459377
36	178	-4,50	9,33	-42,00	20,25	87,11	162,813711	230,623385
32	151	-8,50	-17,67	150,17	72,25	312,11	157,611083	43,7064189
29	145	-11,50	-23,67	272,17	132,25	560,11	153,709112	75,8486379
45	173	4,50	4,33	19,50	20,25	18,78	174,519623	2,30925317
67	201	26,50	32,33	856,83	702,25	1045,44	203,134074	4,55427375
243,00	**1012,00**	**0,00**	**0,00**	**1287,00**	**989,50**	**2045,33**	**1012,00**	**371,39**
40,50	**168,67**					**SST**		**SSE**

R^2= 0,81842182
r= 0,90466669
a1= 1,3006569
a0= 115,990062

حل تمرين أخر بنفس الأسئلة:

x	y						y chapo	y-y chapo
10	3	-0,67	-0,50	0,33	0,44	0,25	3,39198606	0,15365307
14	4	3,33	0,50	1,67	11,11	0,25	4,04006969	0,00160558
5	3	-5,67	-0,50	2,83	32,11	0,25	2,58188153	0,17482305
20	5	9,33	1,50	14,00	87,11	2,25	5,01219512	0,00014872
3	2	-7,67	-1,50	11,50	58,78	2,25	2,25783972	0,06648132
12	4	1,33	0,50	0,67	1,78	0,25	3,71602787	0,08064017
64,00	**21,00**	**0,00**	**0,00**	**31,00**	**191,33**	**5,50**	**21,00**	**0,48**
10,67	**3,50**					**SSR**		**SSE**

R^2= 0,91320874　　a_1= 0,16202091
r= 0,95561956　　a_0= 1,771777

التمرين السابع:

في دراسة تأثير الناتج المحلي الخام X_1 على حجم الاستثمار Yi سجلت النتائج في الجدول المقابل (بالمليار دينار)

المطلوب:

1- تقدير نموذج الانحدار.
2- اختبار معنوية المقدرات مع حساب معامل التحديد، مادا نستنتج؟
3- اختبار صلاحية النموذج. عند مستوى معنوية 5%

X_2	X_1	Yi
10	40	80
20	80	80
5	60	120
5	20	40
10	45	50

بعد إضافة X_2 (احتياطي الصرف الأجنبي). تحصَلنا على النَموذج الخطّي المتعدد التَالي:

$$\hat{Y} = 1.006\,X_1 - 0.905\,X_2 + 50.379$$

1.168 **0.235** (القيَم تحت المقدَرات تمثَل انحرافاتها)

4- شرح هده المعادلة اقتصاديا.
5- اختبار معنوية تأثير المتغيرات المستقلة على المتغير التابع.
6- ضع تفسيرا اقتصاديا للدراسة، مع التفضيل بين النموذجين.
7- هل يمكن اقتراح نموذج أفضل؟

الحل:

X2	**X1**	**Yi**	**$Xi - \overline{X}$**	**$Yi - \overline{y}$**	**$(Xi - \overline{X})x(Yi - \overline{y})$**	**$(Xi - \overline{X})^2$**	$\hat{Y}_t$	**$(Yi - \hat{Y}_t)^2$**	**$(Yi - \overline{y})^2$**
10	40	80	-9	6	-54	81	66,337	186,688	36
20	80	80	31	6	186	961	100,396	415,998	36
5	60	120	11	46	506	121	83,366	1342,025	2116
5	20	40	-29	-34	986	841	49,307	86,619	1156
10	45	50	-4	-24	96	16	70,594	424,115	576
50	**245**	**370**			**1720**	**2020**		**2455,44554**	**3920**
10	***49***	***74***			**a_1=**	**a_0=**			
					0,851	32,277			

RAPPORT DÉTAILLÉ

Statistiques de la régression	
Coefficient de détermination multiple	0,61123713
Coefficient de détermination R^2	0,37361083
Coefficient de détermination R^2	0,16481444
Erreur-type	28,6091218
Observations	5

ANALYSE DE VARIANCE					
	Degré de liberté	*Somme des carrés*	*Moyenne des carrés*	*F*	*Valeur critique de F*
Régression	1	1464,55446	1464,55446	1,78935484	0,27337182
Résidus	3	2455,44554	818,481848		
Total	4	3920			

	Coefficients	*Erreur-type*	*Statistique t*	*Probabilité*
Constante	32,2772277	33,7128349	0,9574166	0,40898779
	0,85148515	0,6365446	1,33766769	0,27337182

المتعدد:

Statistiques de la régression	
Coefficient de détermination multiple	0,88973981
Coefficient de détermination R^2	0,79163693
Coefficient de détermination R^2	0,58327387
Erreur-type	20,2087013
Observations	5

ANALYSE DE VARIANCE

	Degré de liberté	*Somme des carrés*	*Moyenne des carrés*	*F*	*Valeur critique de F*
Régression	2	3103,21678	1551,60839	3,79931507	0,20836307
Résidus	2	816,783217	408,391608		
Total	4	3920			

الفصل الخامس: السلاسل الزمنية:

لقد أصبح الاقتصاد اليوم أكثر تعقيدا مما كان عليه في القديم حيث بتطور المجتمعات زادت متاعب الحياة ولهذا أصبح العلماء يبحثون عن الحلول للظواهر الاقتصادية، فإن المسيرين يبحثون دوما عن طرق لتطوير نوعية المعلومات والقرارات المتخذة.
في هذا المجال فإن طرق التنبؤ لازالت في تطور مستمر عبر الزمن، وهي عديدة ومتنوعة وتختلف باختلاف مجال استخدامها، فنجد مثلا طرق التنبؤ الكمية بنوعيها الخطية وغير الخطية وطرق التنبؤ الكيفية.
إن دراسة طرق التنبؤ تتطلب منا دراسة تحليلية للسلاسل الزمنية ومركباتها وأشكالها بجد التطرق إلى بعض المفاهيم الأساسية حول التنبؤ. ولاختيار أحد هذه الطرق فإنه توجد عدة معايير تؤخذ بعين الاعتبار بعد تحديد الأهداف المتوخاة من عملية التوقع.

تعريف السلسلة الزمنية

السلسلة الزمنية هي مجموعة من المشاهدات مرتبة وفق حدوثها في الزمن كالسنين أو الفصول أو الأشهر أو الأيام أو أية وحدة زمنية. فهي بذلك عبارة عن سجل تاريخي يتم اعتماده لبناء التوقعات المستقبلية.

رسم السلسلة الزمنية:

لما كانت مجموعة المشاهدات للسلسلة أزواجا مرتبة فإنه يمكن تمثيلها بيانيا بنقط في المستوى البياني بحيث يمثل المحور الأفقي الزمن والمحور الرأسي يمثل قيم المشاهدات التي وقعت خلال الزمن.

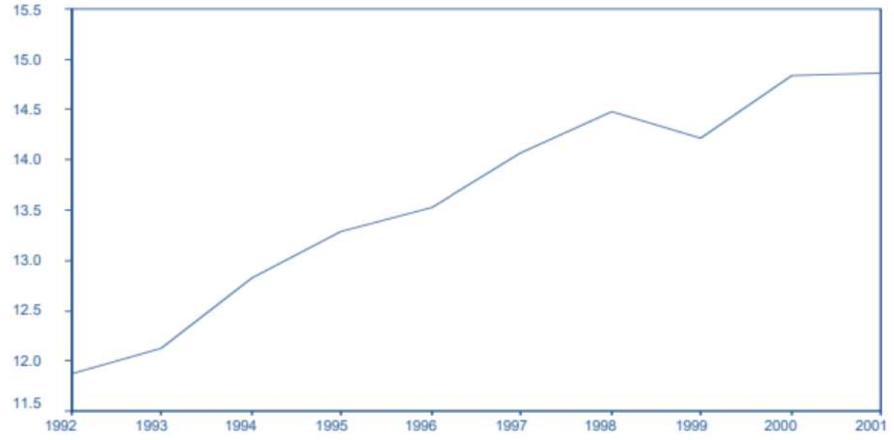
مثال1:

الجدول التالي يمثل أرباح إحدى الشركات بآلاف الدينارات:

السنة	1992	1993	1994	1995	1996
الأرباح	11.87	12.12	12.82	13.29	13.53
السنة	1997	1998	1999	2000	2001
الأرباح	14.07	14.48	14.22	14.84	14.86

المطلوب: مثل هذه السلسة بيانيا.

الحل: يكون الرسم كما هو موضح في الشكل التالي:



أنماط التغير في السلاسل الزمنية:

إن البيانات التي يتم تسجيلها بشكل منتظم لفترة زمنية معينة تشكل سلسلة زمنية، وعند التمثيل البياني للبيانات نجد أن بعض نقاط البيانات لا تقع على منحنى السلسة الزمنية، إلا أن جميع البيانات تميل إلى الاقتراب منها، وتتجمع كنقاط متعنقدة (Clustered) حول السلسة. ويستخدم عادة مصطلح الضوضاء(Noise) لوصف ذلك، فالضوضاء المنخفضة (Low Noise) تعني أن كل أو أغلب النقاط قريبة من السلسة الزمنية، بينما الضوضاء العالية(High Noise) تعني أن بعض النقاط تقع بعيداً نسبياً عن السلسة.

ولابد من التأكيد على أن الضوضاء في السلاسل الزمنية تؤدي إلى صعوبة في التنبؤ حتى مع استخدام الحاسوب، فتكون النتيجة هي أخطاء التنبؤ.

وحتى نستطيع تفسير النمط السلوكي للبيانات لسلسلة زمنية فمن الجدير النظر إلى محتوياتها المختلفة. وهناك أربع مكونات منفصلة للسلسلة الزمنية هي:

1- محتوى الاتجاه العام Trend Component

ويشير إلى النمو أو التدهور الطويل الأمد، ويظهر بسبب عوامل يظهر تأثيرها في المدى الطويل مثل التغير في عدد السكان والتوزيع الجغرافي لهم والتغير التكنولوجي والسلوكي للمستهلكين. وقد يكون هذا الاتجاه خطي أو غير خطي.

2- المحتوى الدوري Cyclical Component

وهو يشير إلى الانحراف الكبير في الطلب عن المتوقع على أساس الاتجاه بفعل التغيرات الكبيرة في الأمد الطويل في البيئة ومثاله الدورات الاقتصادية.

3- المحتوى الموسمي Seasonal Component

ويشير إلى التذبذبات المتكررة في الطلب خلال السنة والتي قد تكون بفعل الجو، التقاليد، والعوامل الأخرى، وهذا النمط من التغير يظهر لأسباب تتعلق بتعامل الشركة مع أنماط معينة من المواد الأولية والمنتجات ذات السمة الموسمية، وهذا النمط يشبه النمط الدوري إلا أن مدة الدورة الواحدة في الأخير عادة ما تكون أطول من سنة.

4- المحتوى العشوائي Irregular Component

وهي التي تحدث بسبب العوامل القصيرة الأجل وغير متكرر الحدوث، وبما أن هذا المكون يتسبب في وجود الاختلاف العشوائي في السلسلة الزمنية فلا يمكن التنبؤ به، ولا نستطيع التنبؤ مسبقاً بتأثيرها على السلسلة الزمنية.

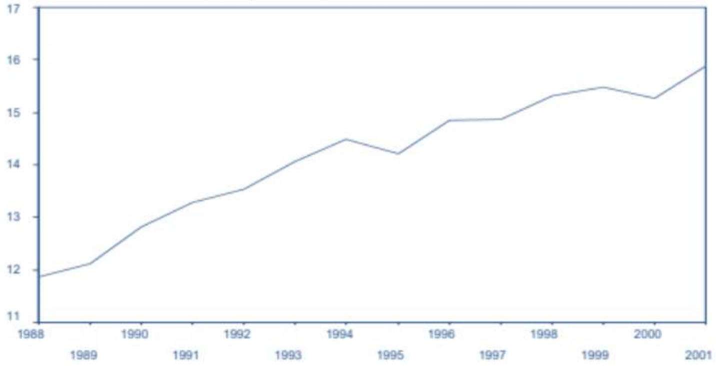
مكونات السلسلة الزمنية:
تتعرض أي سلسلة زمنية لنوعين من التغيرات وهذه. التغيرات يطلق عليها عناصر السلسلة.

أولا: التغيرات المنتظمة:
هي التغيرات التي يتكرر ظهورها في السلسلة في مواضع ذات صفات محددة وتشمل الاتجاه العام والتغيرات الموسمية والتغيرات الدورية.

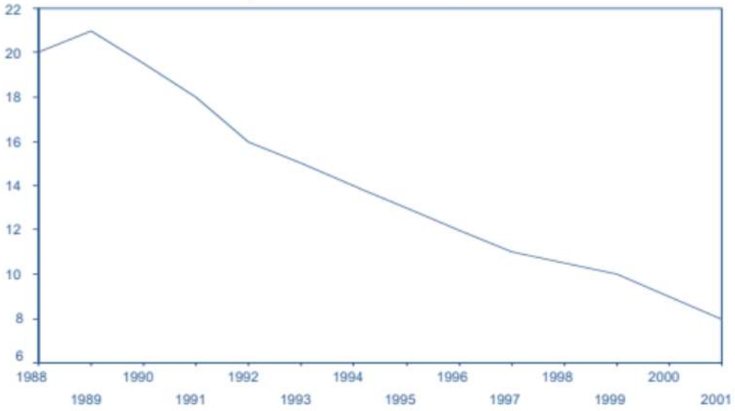
:1الاتجاه العام:

وهو العنصر الذي يقصد به الحركة المنتظمة للسلسلة عبر فترة زمنية طويلة نسبيا. ويقال إن الاتجاه العام للسلسلة موجب إذا كان الاتجاه نحو التزايد بمرور الزمن ويقال إن الاتجاه العام سالب إذا اتجهت نحو التناقص بمرور الزمن،

سلسلة زمنية ذات اتجاه عام موجب



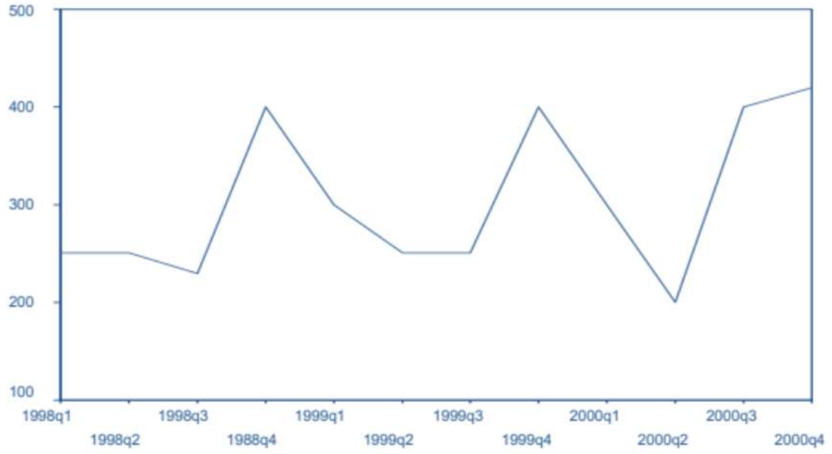
سلسلة زمنية ذات اتجاه عام سالب



:2التغيرات الموسمية:"

هي التي تمثل التغيرات المنتظمة القصيرة الأجل والتي تحدث خلال الفترة الزمنية الواحدة التي لا يزيد طولها عن السنة ، فقد تكون أسبوعية أو شهرية أو فصلية.

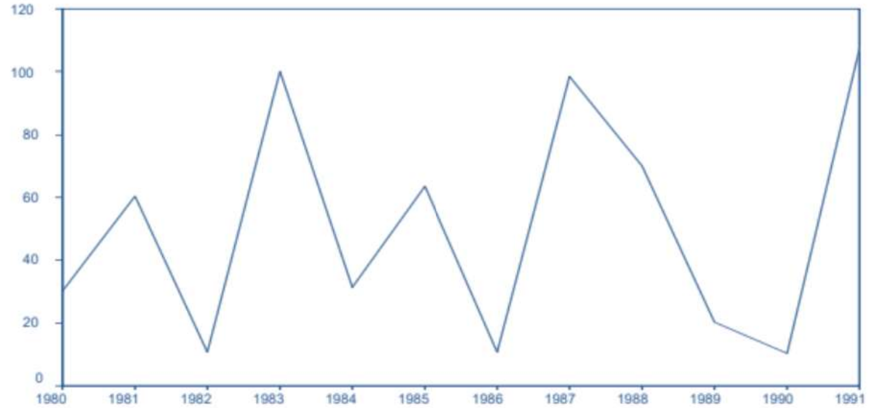
سلسلة زمنية تمثل التغيرات الموسمية



3.التغيرات الدورية:

هي التي تمثل التغيرات التي تطرأ على قيم السلسلة الزمنية بصورة منتظمة ويزيد أمدها عن السنة . وتتكون من دوال تشبه دوال الجيب وجيب التمام ولكن بأطوال وسعات مختلفة.

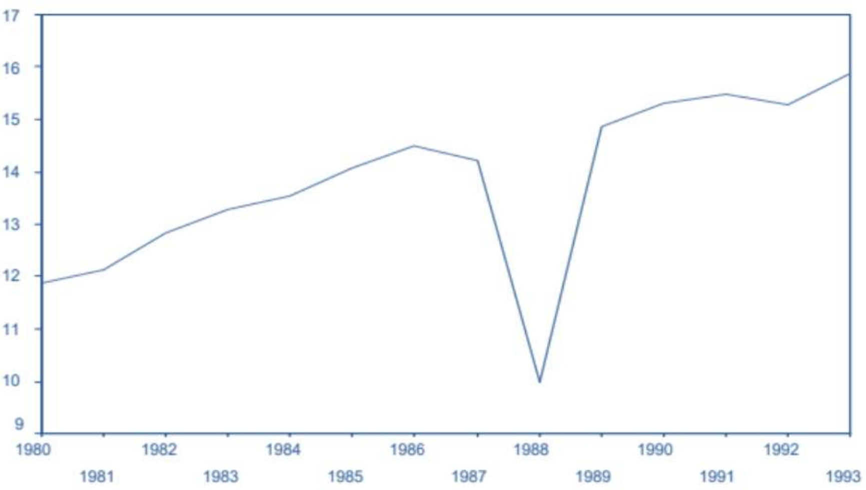
سلسلة زمنية تمثل التغيرات الدورية



ثانيا : التغيرات غير لمنتظمة (العرضية):

تشمل التغيرات العرضية أو الفجائية التي تحدث فجائية لا يمكن التنبؤ بها. ومن أمثلتها ما يحدث للنشاط الاقتصادي في بلد ما بسبب الزلازل أو الحروب غير المتوقعة.

سلسلة زمنية تحتوي على تغيرات فجائية



تحليل السلسلة الى مكوناتها الرئيسية:

يتطلب تحليل السلسلة الزمنية صياغة نموذج رياضي يمثل السلسلة المعطاة. وقد طور الأخصائيون عدة نماذج رياضية تربط بين قيم المشاهدات، وقيم المركبات المختلفة للسلسلة الزمنية، وقبل أن نذكر بعض هذه النماذج سنتفق على استخدام الرموز التالية في السلسلة الزمنية. يستخدم الرمز ليدل على الاتجاه العام، والرمز ليدل على المركبة الفصلية الموسمية، والرمز، ليدل على المركبة الدورية، والرمز ٢ ليدل على التغيرات العرضية. ومن أبرز النماذج الرياضية التي تصف السلسلة الزمنية هي النموذج الضربي والنموذج الجمعي.

1-4-1:النموذج الضربي والنموذج الجمعي

أولا: النموذج الضربي

هو النموذج الذي يفترض أن قيمة الظاهرة (المشاهدة) عند أي نقطة زمنية يساوي حاصل ضرب المركبات الأربعة أي أن:

$$Y = T.\ S.\ C.\ I$$

ويستعمل هذا النموذج غالبا في الحالات التي تكون فيها المركبات ٢ ٢ معطاة أو مطلوبة على صورة نسب مئوية، وذلك من أجل أن تكون وحدات قياس هي نفس وحدات قياس Y.

ومن صفات النموذج أنه يستخدم في الحالات التي يمكن أن نفرض فيها أن المركبات الأربع يؤثر بعضها في بعض على الرغم من أن مصادر حدوثها تكون مختلفة.

ومن أمثلة السلاسل التي يصلح لها النموذج الضربي سلسلة كميات المبيعات من سلعة معينة، لأنه يبدو أن هناك تأثيرا واضحا للمركبات فيما بينها.

ثانياً: النموذج الجمعي

حيث يفترض أن قيمة الظاهرة (المشاهدة) في أي نقطة زمنية هي حاصل جمع المركبات الأربعة أي أن:

$$Y = T + S + C + I$$

ويستعمل هذا النموذج إذا فرضنا أن وحدة قياس جميع المركبات متشابهة وتشابه وحدة قياس المشاهدات ويحدث ذلك أيضا عندما نريد أن نقدر قيم المركبات لا نسبها.

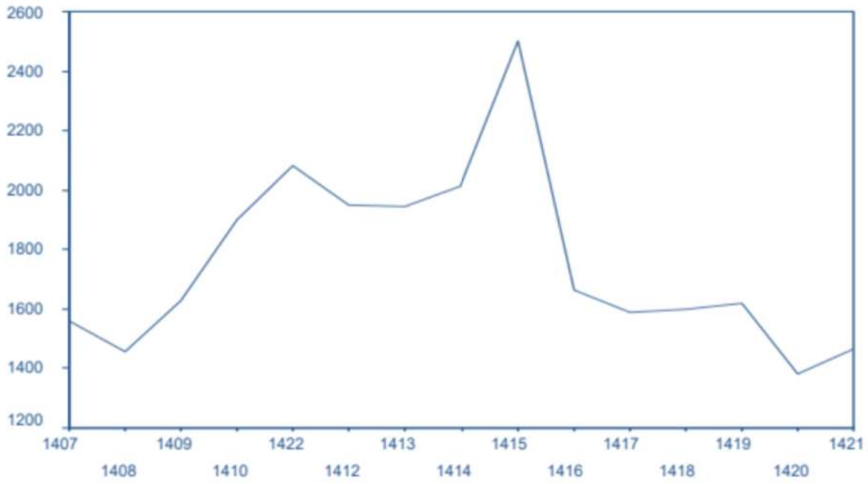
وعند استعمال هذا النموذج يجب أن يكون بالإمكان فرض أن جميع المركبات مستقل بعضها عن بعض، بمعنى أن حدوث إحداها لا يؤثر في حدوث المركبات الأخرى. وفي هذا النموذج يجب أن يكون مجموع قيم المركبة الفصلية على مدار السنة مساويا صفرا.

مثال 2: الجدول التالي يمثل أعداد الحجاج في الفترة من 1407 إلى 1420 بالألف

السنة	1407	1408	1409	1410	1411	1412	1413	1414
العدد	1558	1456	1628	1899	2080	1950	1943	2012
السنة	1415	1416	1417	1418	1419	1420	1421	
العدد	2502	1665	1590	1601	1619	1380	1467	

المطلوب: حلل هذه السلسلة حسب المركبات المؤثرة فيها

الحل: التمثيل البياني للسلسلة:



يتضح من ملاحظة المشاهدات والشكل البياني أن هذه السلسلة تتعرض للاتجاه العام والتغيرات الدورية والتغيرات العرضية.
كما أننا نلاحظ أن المركبة الفصلية غير موجودة حيث أن أعداد الحجاج تعطى سنويا. ومعنى هذا أن النموذج الذي يمثل هذه السلسلة لا يحتوي على المركبة S.

5-1: تحليل الاتجاه العام

يتم تحديد الاتجاه العام لأي ظاهرة بطرق كثيرة، ومن أهم الطرق التي نستخدمها في هذا المجال هي:

طريقة المربعات الصغرى:

يمكن تقدير الاتجاه العام للسلسلة الزمنية بطريقة المربعات الصغرى، بحيث نستخدم الزمن كمتغير مستقل وقيم السلسلة إ كمتغير تابع، ويمكن استخدام معادلة الانحدار للتنبؤ عن قيم .مستقبلية لهذه السلسلة. وهناك أنواع عديدة من معادلات الاتجاه العام منها.

أول: الاتجاه العام الخطي

إذا كانت الظاهرة تزيد أو (تنقص) بمقدار ثابت كل فترة زمنية فإن معادلة الاتجاه العام تكون على صورة خط مستقيم أي أن معادلته هي:

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$$

حيث: $\hat{a}$ هو الجزء المقطوع من المحور الرأسي

$\hat{a}_1$:ميل خط الاتجاه

$\hat{y}$: قيمة الظاهرة الاتجاهية

x دليل الزمن (تبدأ بالواحد لأول فترة ثم اثنين للفترة الثانية وهكذا.......).
ملاحظة: إن إعطاء ترقيم متسلسل للزمن على النحو 1,2,3 ليس ملزما إذ يمكن الابتداء من صفر ثم واحد وهكذا. وتكون:

$$\hat{a_1} = \frac{\sum xy - n\overline{x}\overline{y}}{\sum x^2 - n\overline{x}^2}$$

$$\hat{a}_0 = \overline{y} - \hat{a_1}\overline{x}$$

بعد تقدير $\hat{a}_0$ ، $\hat{a_1}$، يمكن استخدام معادلة الاتجاه العام في التنبؤ بالقيم المستقبلية للظاهرة وذلك بالتعويض عن قيم X في المعادلة:

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a_1}x$$

مثال 3:
الجدول التالي يوضح عدد السيارات التي نقلت الحجاج في السنوات من 1407 - 1416-

السنة	1407	1408	1409	1410	1411
عدد السيارات	98017	88460	92234	124108	94355
السنة	1412	1413	1414	1415	1416
عدد السيارات	122521	114732	117724	145973	122991

المطلوب: إيجاد معادلة خط الاتجاه العام.
الحل: لإيجاد معادلة الاتجاه العام نحسب، حيث نعرف الزمن ابتداء من العدد واحد بشكل متسلسل وبزيادة واحد في كل مرة وبالتطبيق نحصل على:
- معادلة الاتجاه العام هي:

$$\hat{y} = 86950 + 4574.818\, x$$

مثال 4:
من التطبيق الثالث ما هي عدد السيارات المقدرة لعام 1420؟
الحل: لإيجاد عدد السيارات المقدرة لعام 1420 نعوض عن x = 14 في المعادلة الاتجاهية فتكون:

$$\hat{y} = (14)\,4574.818 + 86950$$

ثانيأ : الاتجاه العام غير الخطي

قد نواجه حالات مغايرة للاتجاه الخطي عند وصف التغيرات للسلسلة بحيث لا يمكن معها استخدام معادلة الاتجاه الخطي خاصة مع الظواهر الاقتصادية التي تتصف بلتغير على الأمد الطويل ، حينئذ نستخدم معادلة غير خطية مناسبة لقياس منحنى الاتجاه . ومن أهم هذه الطرق نجد:

1معادلة الاتجاه العام الآسي:

إذا كانت الظاهرة تزيد (أو تنقص) بمعدل ثابت كل فترة زمنية فان معادلة الاتجاه العام تأخذ الشكل التالي:

$$\hat{y} = \hat{a}\,\hat{b}^{\,x}$$

وبنفس الأسلوب السابق نقدر $\log \hat{a}, \log \hat{b}$ ومن ثم نجد $\hat{a}\ ,\ \hat{b}$ ونحصل على معادلة الاتجاه الآسية التي يمكن استخدامها في التنبؤ.

2معادلة الاتجاه التربيعي :

إذا دل التمثيل البياني للسلسلة البيانية على وجود علاقة منحنية من الدرجة الثانية مثلا (قطعا مكافئا، فإن معادلة الاتجاه العام تكون على صورة معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد وتأخذ الصورة التالية

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x + \hat{c}x^2$$

وباستخدام طريقة المربعات الصغرى نقدر كلا من $c\ ,\ b\ ,\ a$ وبالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على معادلة الاتجاه العام التي يمكن استخدامها في التنبؤ بالقيم المستقبلية للظاهرة.

مثال 5 : الجدول التالي أعداد المسافرين بواسطة إحدى شركات الطيران العالمية خلال السنوات 1991 - 2001 مقدرة بالألف.

السنة	1991	1992	1993	1994	1995	1996
عدد المسافرين	210	250	260	240	300	310
السنة	1997	1998	1999	2000	2001	
عدد المسافرين	330	380	470	530	560	

المطلوب:

1 -ارسم سلسلة أعداد المسافرين.

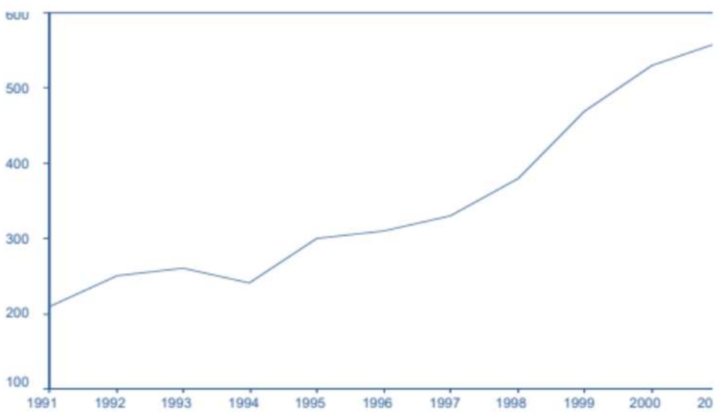
2 -حدد النموذج الملائم لإيجاد معادلة الاتجاه العام.

- 3إيجاد معادلة خط الاتجاه العام

4 -ما هي أعداد المسافرين المقدرة لعام 2003؟

الحل:

- 1نرسم السلسلة كالآتي:



- 2واضح من هذا الشكل أن خط الاتجاه المستقيم لا يكون ملائما وأن الشكل يوحي بإمكانية استخدام النموذج الآتي.

$$\hat{y} = \hat{a}\,\hat{b}^{\,x}$$

وهي معادلة لوغاريتمية خطية تمكننا من استخدام طريقة المربعات الصغرى لحساب«...

- 3من النتائج نلاحظ أن

$$a_1 = 2.267 \;, b_1 = .04225$$

$$\hat{a} = 10^{a_1} = 10^{2.267} = 184.927$$

$$\hat{b} = 10^{b_1} = 10^{.04225} = 1.1022$$

وتكون المعادلة الاتجاهية هي:

$$\hat{y} = 184.927\,(1.1022)^{x}$$

- 4ولإيجاد أعداد المسافرين المقدرة لعام 2003 نعوض في المعادلة عن $x = 13$

فيكون العدد المقدر هو655

1-6: تحليل التغير الموسمي

تتركز أهمية دراسة التغيرات الموسمية في كل من تخليص البيانات من أثر الموسم وفي التنبؤ. وهناك عدة طرق لتقدير المركبة الموسمية (الفصلية). سنكتفي بذكر واحدة منها والتي تسمى النسبة إلى الاتجاه العام وتعتمد هذه الطريقة على حساب الدليل الموسمي،

1-6-1: تعريف الدليل الموسمي

نسبة مئوية توضح أثر الموسم في الظاهرة محل الدراسة فإذا كان الدليل الموسمي لأحد المواسم % 98 يدل على أن هذا الموسم يؤدي إلى نقص قيم الظاهرة بنسبة 2 % وإذا كان الدليل الموسمي %05 دل ذلك على أن الظاهرة تزيد في هذا الموسم بنسبة 5.%

2-6-1: خطوات حساب الدليل الموسمي

- 1رسم السلسلة الزمنية ومن خلال الرسم نحدد معادلة الاتجاه العام المناسبة.
- 2أيجاد معادلة خط الاتجاه العام باستخدام طريقة المربعات الصغرى مع أخذ قيم. موسميا،
- 3تكوين القيم الاتجاهية بالتعويض عن في معادلة خط الاتجاه العام.
- 4تكوين النسب الموسمية لكل موسم $= \frac{y}{\hat{y}}(100\ )$
- 5تكوين متوسط النسب الموسمية لكل موسم عبر السنوات وليكن m_i

6 -حساب الدليل الموسمي من المعادلة:

$$s_i = \frac{m_i}{\sum m_i} 100\ m$$

حيث m عدد المواسم، Si الدليل الموسمي لكل موسم

مثال 6 : البيانات التالية توضح المبيعات ربع السنوية (بالمليون ريال) لإحدى شركات المياه الغازية لسنوات 1999، 2000، 2001

السنة / الربع	1999	2000	2001
الأول	**10**	**12**	**13**
الثاني	**20**	**30**	**25**
الثالث	**50**	**80**	**70**
الرابع	**20**	**30**	**40**

المطلوب: حساب الدليل الموسمي لكل فصل.

الحل:

- 1نكون معادلة الاتجاه العام بافتراض أنها خطية على الشكل التالي:

$$\hat{y} = 18.015 + 2.357\ x$$

.

2- ٢ نحسب القيم الاتجاهية المناظرة لكل قيمة

3-نحسب النسبة الموسمية لكل فصل

$$q = \frac{y}{\hat{y}}(100)$$

-4نحسب متوسطات النسب الموسمية لكل فصل:

متوسط النسب الموسمية للفصل الأول

متوسط النسب الموسمية للفصل الأول .

$$m_1 = \frac{49.09+40.27+33.14}{3} = 40.8$$

متوسط النسب الموسمية للفصل الثاني .

$$m_2 = \frac{88+93.3+60.12}{3} = 80.47$$

متوسط النسب الموسمية للفصل الثالث .

$$m_3 = \frac{199.32 + 231.81 + 159.31}{3} = 196.8$$

متوسط النسب الموسمية للفصل الرابع .

$$m_4 = \frac{72.88 + 81.37 + 86.4}{3} = 80.2$$

5 – حساب الدليل الموسمي لكل فصل

$$s_i = \frac{m_i}{\sum m_i} 100\ m$$

نحسب أولاً:

$$\sum m_i = 40.8 + 80.47 + 196.8 + 80.2 = 398.27$$

الدليل الموسمي للفصل الأول :

$$s_1 = \frac{40.8}{398.27} 400 = 40.977$$

أي أن في هذا الموسم تنقص الظاهرة عن قيمتها الاتجاهية بنسبة % 59.023

الدليل الموسمي للفصل الثاني :

$$s_2 = \frac{80.47}{398.27} 400 = 80.82$$

في هذا الموسم تنقص الظاهرة بنسبة % 19.18

الدليل الموسمي للفصل الثالث :

$$s_3 = \frac{196.8}{398.27} 400 = 197.65$$

فى هذا الموسم تزيد الظاهرة عن قيمتها الاتجاهية بنسبة % 97.65

الدليل الموسمي للفصل الرابع:

$$s_4 = \frac{80.2}{398.27} 400 = 80.545$$

في هذا الموسم تنقص الظاهرة بنسبة %% 19.455

3-6-1: استخدامات الدليل الموسمي

أولا: استبعاد أثر التغيرات الموسمية من القيم

بفرض أن لديك سلسلة زمنية نموذجها الضربي هو:

$$Y= T . S . C . I$$

القيمة الفعلية مخلصة من أثر الموسم $= \frac{y}{s}(100)$

ثانيا: إضافة أثر الموسم للقيم الاتجاهية (التنبؤ)

القيمة الاتجاهية مضافا لها أثر الموسم = القيمة الاتجاهية مضروبة في الدليل الموسمي مقسوم على 100 أي أن:

القيمة الاتجاهية مضافا لها أثر الموسم $= \frac{\hat{y}\ s}{100}$

مثال 7:

من التطبيق الرابع المطلوب:

- 1استبعد أثر التغيرات الموسمية من قيم السلسلة
- 2قدر المبيعات لعام 2002 في فصولها الأربع

الحل:

لاستبعاد أثر التغيرات الموسمية للسلسلة نتبع الآتي:

الدليل الموسمي لكل فصل من التطبيق السابق كما يلي:

الموسم	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
الدليل الموسمي	40.977	80.82	197.65	80.545

نقسم كل مشاهدة في السلسلة الزمنية على الدليل الموسمي المناظر، ونضرب الناتج في 100 فنحصل على الجدول الآتي الذي يعطي قيم السلسلة بعد إزالة أثر الموسم منها،

السنة الربع	1999	2000	2001
الأول	24.4	29.28	31.73
الثاني	24.75	37.12	30.93
الثالث	25.3	40.5	35.42
الرابع	24.83	37.25	49.66

لتقدير المبيعات لعام 2002:

-نحسب القيمة الاتجاهية لكل فصل وذلك بالتعويض عن x= 13, 14, 15, 16 في المعادلة

$$\hat{y} = 18.015 + 2.357\ x$$

فنحصل على القيم الاتجاهية كما في العمود الثالث من الجدول التالي:

- 2نضرب القيمة الاتجاهية في الدليل الموسمي ونقسم على 100 فنحصل على القيم المقدرة للمبيعات لكل فصل لعام 2002 كما في العمود الرابع من الجدول.

الفصل	x	$\hat{y}$	$\hat{y} * s_i /100$
1	13	48.656	19.938
2	14	51.013	41.229
3	15	53.37	105.486
4	16	55.727	44.885

:1-7تحليل التغير الدوري

تنتاب السلاسل الزمنية تغيرات قد تتكرر خلال فترات زمنية متوسطة الطول، وتظهر هذه الدورات المتكررة قريبة من شكل منحنى الجيب أو جيب التمام، ولكنها قد تكون بأطوال وسعات مختلفة وقد يحتاج تقدير هذه المركبة إلى ست أو سبع دورات كاملة من البيانات للتأكد من وجود مركبة الدورة. لهذا نحتاج لمراقبة السلسلة لفترة طويلة.

:1-7-1تقدير مركبة الدورة

يعتبر استبعاد أثر التغيرات الدورية من الأهمية في مجال المقارنة بين السلاسل الزمنية. وتوجد طرق كثيرة لتقدير التغيرات الدورية ومن ثم فصلها من السلسلة سوف نذكر منها هنا طريقة واحدة مبنية على أساس النموذج الضربي وتسمى طريقة البواقي. ولتقدير مركبة الدورة يمكن اتباع الخطوات التالية:

- 1احسب مركبة الاتجاه العام باستعمال أحد الأساليب المناسبة.

- 2احسب المركبات الفصلية (الدليل الموسمي).

- 3نستبعد من قيم الظاهرة أثر الاتجاه العام (بقسمة قيمة الظاهرة على القيم الاتجاهية).

- 4نستبعد أثر الموسم (بقسمة ناتج القسمة السابق على الدليل الموسمي).

- 5الباقي هو محصلة التغيرات الدورية والتغيرات العرضية ولفصل التغيرات العرضية نستخدم أسلوب المتوسطات المتحركة لفترة قصيرة.

- **المتوسطات المتحركة:**

الهدف منها هو إزالة التذبذب العشوائي في السلسلة الزمنية الذي قد يحدث لمتغير، فقد يزداد أو ينقص خلال فترة زمنية طويلة. وللتخلص من هذا الأثر يجمع كل عدد متتال من السنوات (حسب طول الدورة) ويوجد متوسطه فتكون هذه المتوسطات هي القيم الاتجاهية.

مثال 8:

احسب المتوسطات المتحركة لفترة ثلاث سنوات للسلسلة الزمنية الآتية التي تمثل إنتاج أحد أنواع السيارات (بالألف) للفترة من 1986- 1995.

السنة	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
الإنتاج	17	22	18	26	16	27	19	31	28	37

الحل: لتبسيط العملية الحسابية نحسب أولا المجاميع المتحركة ومن ثم المتوسطات المتحركة كما يلي:

السنة	الإنتاج	المجاميع المتحركة	المتوسطات المتحركة
1986	17	---	---
1987	22	57	19
1988	18	66	22
1989	26	60	20
1990	16	69	23
1991	27	62	20.67
1992	19	77	25.67
1993	31	78	26
1994	28	96	32
1995	37	---	---

مثال 9:

من التطبيق الرابع قدر التغيرات الدورية باعتبار أن طول الفترة = 3 فصول

الحل:

-١ نحسب مركبة الاتجاه العام كما سبق

2 -نستبعد أثر الاتجاه العام وذلك بقسمة القيم الفعلية على القيم الاتجاهية (نقسم بيانات العمود الثالث على بيانات العمود الرابع المناظرة لها فنحصل على العمود الخامس) كما بالجدول التالي:

3 -نستبعد أثر الموسم (بقسمة بيانات العمود الخامس على الدليل الموسمي المناظر لكل قيمة فنحصل على العمود السادس)

السنة	الفصل	القيم الفعلية	القيم الاتجاهية	التخليص من أثر الاتجاه العام	التخليص من أثر الموسم	المجموع المتحرك	المتوسط المتحرك
1999	1	10	20.37	.49	1.2	-----	
	2	20	22.73	.88	1.09	3.3	1.1
	3	50	25.085	1.99	1.01	3.01	1
	4	20	27.442	.73	.91	2.9	.97
2000	1	12	29.798	.40	.98	3.04	1.01
	2	30	32.155	.93	1.15	3.3	1.1
	3	80	34.51	2.32	1.17	3.33	1.11
	4	30	36.87	.81	1.01	2.99	.997
2001	1	13	39.225	.33	.81	2.56	.85
	2	25	41.58	.60	.74	2.35	.78
	3	70	43.94	1.59	.80	2.61	.87
	4	40	46.29	.86	1.07	-----	

- 4الباقي هو محصلة التغيرات الدورية والتغيرات العرضية ولفصل التغيرات العرضية نستخدم أسلوب المتوسطات المتحركة لفترة قصيرة ولتكن ثلاثة فصول.

- 5بعد استخدام أسلوب المتوسطات المتحركة نحصل على العمود الثامن الذي يمثل أثر التغيرات الدورية لكل فصل.

أي أن أثر التغير الدوري في الفصل الثاني لعام 2001 يساوي 0.78-1 = 0.22 وهكذا بالنسبة لبقية الفصول.

تمارين محلولة في السلاسل الزمنية:

التمرين الأول:

سجلت مبيعات Y_t لإحدى الشركات خلال 3 سنوات من 2002-2004 وبالنسبة لكل ثلاثي كما يلي:

الثلاثي	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4
المبيعات	164	198	85	179	168	201	98	197	197	209	100	216

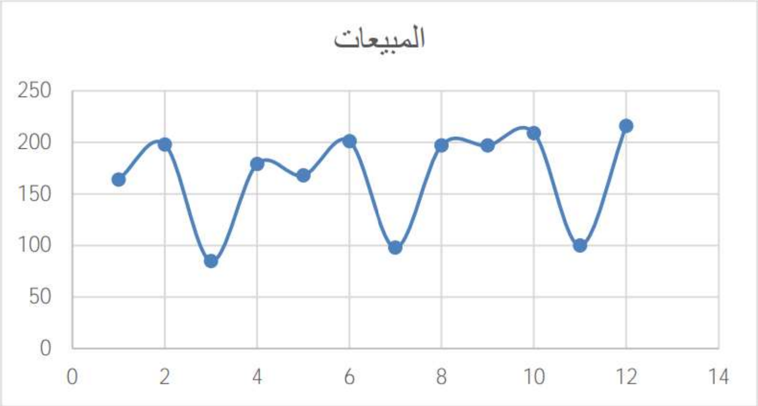
- 1 رسم سلسلة المبيعات مع التعليق.
- 2 استنتاج النموذج الملائم لإيجاد معادلة الاتجاه العام من خلال الرسم.
- 3 إيجاد معادلة خط الاتجاه العام. اذا علمت أن: $\sum_{t=1}^{n}(x_t-\bar{x})(y_t-\bar{y})=316$ وأن:

$$\sum_{t=1}^{n}(x_t-\bar{x})^2=143$$

- 4 حساب الدليل الموسمي لكل فصل.
- 5 استبعاد أثر التغيرات الموسمية.
- 6 تقدير المبيعات في الفصل الثاني لسنة 2005.
- 7 تقدير التغيرات الدورية باعتبار أن طول الفترة =3 فصول. ماذا تلاحظ؟

الحل:

- 1رسم سلسلة المبيعات:



التعليق: نلاحظ أنّ السلسلة الزمنية تتغير بشكل اتجاه عام خطي باستثناء التغيرات الموسمية التي يهبط عندها المنحنى في كل موسم ثالث.

- 2 نستنتج أنّ النموذج الملائم لتقدير الاتجاه العام هو النموذج الخطي

- 3 إيجاد معادلة خط الاتجاه العام

$$\hat{Y}_t=153{,}3+2{,}21X$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})^2} \Longrightarrow \hat{a}_1 = \frac{316}{143} \Longrightarrow \hat{a}_1 = 2{,}21$$

$$\hat{a}_0 = \overline{Y} - \hat{a}_1\overline{X} \Rightarrow \hat{a}_0 = 167{,}7 - (\ 6{,}5\ .\ 2{,}21) \Rightarrow \hat{a}_0 = 153{,}30$$

4 حساب الدليل الموسمي لكل فصل

x	y	$\hat{Y}$	q	المتوسط m	الدليل الموسمي s	التغير	إزالة أثر الموسم	إزالة أثر الاتجاه	إزالة أثر الموسم	المتوسط المتحرك
1	164	155,51	105,46	107,14	107,14	-7,14	153,07	1,05	0,98	
2	198	157,72	125,54	121,79	121,79	-21,79	162,58	1,26	1,03	0,99
3	85	159,93	53,15	55,84	55,84	44,16	152,23	0,53	0,95	0,98
4	179	162,14	110,40	115,24	115,24	-15,24	155,33	1,10	0,96	0,95
5	168	164,35	102,22				156,81	1,02	0,95	0,97
6	201	166,56	120,68				165,04	1,21	0,99	0,99
7	98	168,77	58,07				175,51	0,58	1,04	1,01
8	197	170,98	115,22				170,95	1,15	1,00	1,03
9	197	173,19	113,75				183,88	1,14	1,06	1,01
10	209	175,40	119,16				171,61	1,19	0,98	1,02
11	100	177,61	56,30				179,09	0,56	1,01	1,01
12	216	179,82	120,12				187,43	1,20	1,04	
78	2 012	2 012,00	1 200,04	400,01	400,00					

لاحظنا من خلال المنحنى أنه لا توجد تغيرات دورية واضحة حيث أنه بعد الحساب يتم تأكيد هذه المعلومة باعتبار التغيرات ضعيفة جدا.

التمرين الثاني:

في دراسة لنماذج الترويج سجلت نسبة التجهيز لأحد المنتجات Y_t في دولة معينة خلال الفترة 1989-2007 كما يلي:

السنوات t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
نسبة التجهيز Y_t	34.7	51	71.3	95.8	124	155.6	190.1	226.9	265.4	305	345.2	385.3	424.8	463.3	500.1	534.9	567.3	597	623.9

تأكدنا من خلال المنحنى أن المعلومات تخضع لنموذج لوجيستي من الشكل: $y_t = \frac{y_{max}}{1 + br^t}$

بافتراض أن نسبة التجهيز القصوى هي$Y_{Max}=$800، قدر معلمات النموذج b و r ; مع العلم أنه اذا كان:

$$K = Ln((Y_{Max}/Y_t) - 1)$$

فان: $\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})(K_i - \overline{K}) = -126{,}377$ وأن: $\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2 = 570$

الحل: نقوم بتحويل النموذج اللوجستي الى نموذج خطي باستعمال اللوغاريتم وذلك لتسهيل الحل:

$$Y_t = \frac{Y_{Max}}{1+br^t} \Rightarrow br^t = (Y_{Max}/Y_t)-1 \Rightarrow Lnbr^t = Ln((Y_{Max}/Y_t)-1) \Rightarrow Lnb + t.\ Lnr = Ln((Y_{Max}/Y_t)-1)$$

نضع: $Lnr = a_1$ و $Lnb = a_0$ و $K = Ln((Y_{Max}/Y_t)-1)$

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(t_i-\bar{t})(K_i-\bar{K})}{\sum_{t=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2} \Longrightarrow \hat{a}_1 = \frac{126{,}377}{570} \Longrightarrow \hat{a}_1 = -0{,}222$$

$$\hat{a}_0 = \bar{K} - \hat{a}_1\bar{t} \quad \& \quad \bar{K} = 0{,}629 \quad \& \quad \bar{t} = 10 \Rightarrow \hat{a}_0 = 2{,}846$$

$$\hat{a}_1 = -0{,}222 \Rightarrow r = 0{,}801 \ \& \quad \hat{a}_0 = 2{,}846 \Rightarrow b = 17{,}221$$

$$\Rightarrow Y_t = \frac{800}{1+17{,}22\times 0{,}801^t}$$

<u>حل التمرين الثاني بدون مساعدة القيم:</u>

t السنوات	نسبة التجهيز	K					Y logit	Y line	Msd1	Msd2
1	34,7	3,094	2,465	-9	-22,181	81	54,066	-1,854	375,041	1336,172
2	51	2,687	2,058	-8	-16,463	64	66,373	33,215	236,314	316,291
3	71,3	2,324	1,695	-7	-11,867	49	81,175	68,285	97,524	9,093
4	95,8	1,995	1,366	-6	-8,195	36	98,835	103,354	9,211	57,058
5	124	1,696	1,067	-5	-5,335	25	119,697	138,423	18,518	208,017
6	155,6	1,421	0,792	-4	-3,168	16	144,057	173,492	133,238	320,121
7	190,1	1,166	0,537	-3	-1,610	9	172,121	208,561	323,247	340,810
8	226,9	0,927	0,298	-2	-0,595	4	203,952	243,630	526,611	279,899
9	265,4	0,700	0,071	-1	-0,071	1	239,425	278,699	674,702	176,871
10	305	0,484	-0,145	0	0,000	0	278,188	313,768	718,875	76,885
11	345,2	0,276	-0,353	1	-0,353	1	319,649	348,838	652,875	13,232
12	385,3	0,074	-0,555	2	-1,111	4	362,990	383,907	497,748	1,941
13	424,8	-0,124	-0,753	3	-2,260	9	407,226	418,976	308,862	33,921
14	463,3	-0,319	-0,948	4	-3,793	16	451,285	454,045	144,355	85,657
15	500,1	-0,511	-1,140	5	-5,702	25	494,115	489,114	35,821	120,691
16	534,9	-0,702	-1,331	6	-7,986	36	534,776	524,183	0,015	114,851
17	567,3	-0,891	-1,520	7	-10,641	49	572,520	559,252	27,250	64,766
18	597	-1,079	-1,708	8	-13,662	64	606,833	594,321	96,691	7,175
19	623,9	-1,265	-1,265	9	-11,384	81	800,000	18,514	31011,210	366492,146
190		**11,951**			**-126,377**	**570**			**35888,110**	**370055,598**
10		**0,629**							**1888,848**	**19476,610**

a1	**-0,222**	**r**	**0,801**
a0	**2,846**	**b**	**17,221**

التمرين الثالث:

لغرض دراسة سلسلة زمنية بمنهجية Box-Jenkins تم استعمال برنامج Eviews والحصول على النتائج التالية:

1- علق على الجدول المقابل مع تعريف كل عمود.

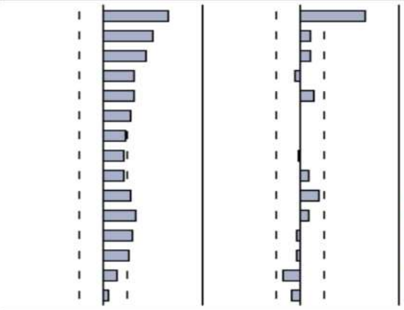
تم اقتراح نموذجين: Arma (1.1) أو Ar (1) ثمّ اختبارهما:

2- فاضل بين النموذجين مع الشرح.

3- كتابة النموذج الملائم

Included observations: 60

Autocorrelation | Partial Correlation



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.690	0.690	29.996	0.000
2	0.527	0.099	47.837	0.000
3	0.447	0.099	60.883	0.000
4	0.330	-0.061	68.121	0.000
5	0.330	0.153	75.471	0.000
6	0.291	-0.007	81.316	0.000
7	0.244	0.006	85.490	0.000
8	0.211	-0.015	88.689	0.000
9	0.211	0.083	91.941	0.000
10	0.295	0.197	98.415	0.000
11	0.339	0.087	107.12	0.000
12	0.307	-0.045	114.45	0.000
13	0.268	-0.036	120.15	0.000
14	0.142	-0.179	121.77	0.000
15	0.055	-0.093	122.03	0.000

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	6.191556	1.418264	4.365588	0.0001
AR(1)	0.689752	0.095688	7.208318	0.0000

R-squared	0.476872	Mean dependent var	6.123729
Adjusted R-squared	0.467694	S.D. dependent var	4.631390
S.E. of regression	3.379030	Akaike info criterion	5.306365
Sum squared resid	650.8172	Schwarz criterion	5.376790
Log likelihood	-154.5378	Hannan-Quinn criter.	5.333856
F-statistic	51.95985	Durbin-Watson stat	2.095747
Prob(F-statistic)	0.000000		
Inverted AR Roots	.69		

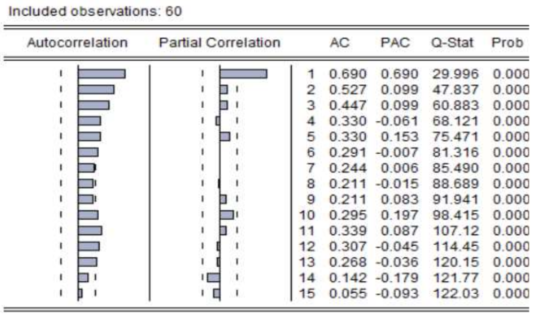
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	6.292208	1.702441	3.695992	0.0005
AR(1)	0.789764	0.119482	6.609897	0.0000
MA(1)	-0.195767	0.193205	-1.013263	0.3153

R-squared	0.483929	Mean dependent var	6.123729
Adjusted R-squared	0.465498	S.D. dependent var	4.631390
S.E. of regression	3.385993	Akaike info criterion	5.326681
Sum squared resid	642.0370	Schwarz criterion	5.432318
Log likelihood	-154.1371	Hannan-Quinn criter.	5.367917
F-statistic	26.25611	Durbin-Watson stat	1.942861
Prob(F-statistic)	0.000000		
Inverted AR Roots	.79		
Inverted MA Roots	.20		

الحل:

1- **التعليق:** يوضح الجدول المقابل دالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي بين السلسلتين Yt و Yt-k حيث أنّ: k يمثل التأخرمن1 الى 15

(le corrélogramme): التمثيل البياني للدالتين مع تحديد مجال الثقة.



Included observations: 60

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.690	0.690	29.996	0.000
		2	0.527	0.099	47.837	0.000
		3	0.447	0.099	60.883	0.000
		4	0.330	-0.061	68.121	0.000
		5	0.330	0.153	75.471	0.000
		6	0.291	-0.007	81.316	0.000
		7	0.244	0.006	85.490	0.000
		8	0.211	-0.015	88.689	0.000
		9	0.211	0.083	91.941	0.000
		10	0.295	0.197	98.415	0.000
		11	0.339	0.087	107.12	0.000
		12	0.307	-0.045	114.45	0.000
		13	0.268	-0.036	120.15	0.000
		14	0.142	-0.179	121.77	0.000
		15	0.055	-0.093	122.03	0.000

AC: دالة الارتباط الذاتي.

PAC: دالة الارتباط الذاتي الجزئي.

Q-STAT: إحصائية الاختبار.

Prob: احتمال عدم معنوية معامل الارتباط احصائيا.

2- في تقدير نموذج Arma (1.1) نلاحظ أنّ معامل Ar (1) معنوي احصائيا بينما معامل MA (1) غير معنوي لهذا يتم رفض النموذج.

أما تقدير نموذج Ar (1) نلاحظ أنّ معامل Ar (1) معنوي احصائيا فبالتالي يمكن الاعتماد على هذا النموذج في التنبؤ.

3- $Yt = 6,19 + 0,69\ Yt\text{-}1 + \varepsilon i$

التمرين الرابع:

سجلت مبيعات Y_t لإحدى الشركات خلال 3 سنوات من 2013-2015 وبالنسبة لكل ثلاثي كما يلي:

الثلاثي	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4
المبيعات	250	260	351	265	269	270	362	276	278	280	384	284

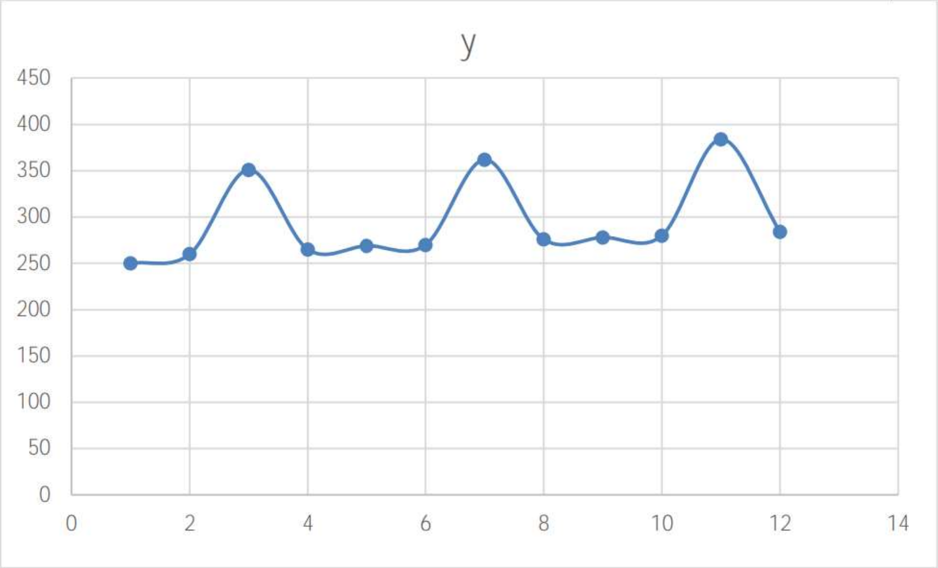
- 1 رسم سلسلة المبيعات مع التعليق.
- 2 استنتاج النموذج الملائم لإيجاد معادلة الاتجاه العام من خلال الرسم.
- 3 إيجاد معادلة خط الاتجاه العام. اذا علمت أن: $\sum_{t=1}^{n}(x_t-\bar{x})(y_t-\bar{y}) = 585,5$

وأن: $\sum_{t=1}^{n}(x_t-\bar{x})^2 = 143$

- 4 حساب الدليل الموسمي لكل فصل.
- 5 استبعاد أثر التغيرات الموسمية.
- 6 تقدير المبيعات في الفصل الثاني لسنة 2005.
- 7 تقدير التغيرات الدورية باعتبار أن طول الفترة =3 فصول. ماذا تلاحظ؟

الحل:

رسم السلسلة:



x	y	$\hat{Y}$	q	المتوسط m	الدليل الموسمي s	التغير	إزالة أثر الموسم	إزالة أثر الاتجاه	إزالة أثر الموسم	المتوسط المتحرك
1	250	271,56	92,06	92,28	92,28	-7,72	270,92	0,92	1,00	
2	260	275,66	94,32	92,52	92,52	-7,48	281,01	0,94	1,02	1,01
3	351	279,75	125,47	123,53	123,53	23,53	284,14	1,25	1,02	1,02
4	265	283,85	93,36	91,66	91,67	-8,33	289,09	0,93	1,02	1,02
5	269	287,94	93,42				291,51	0,93	1,01	1,01
6	270	292,04	92,45				291,82	0,92	1,00	1,00
7	362	296,13	122,24				293,04	1,22	0,99	1,00
8	276	300,22	91,93				301,09	0,92	1,00	0,99
9	278	304,32	91,35				301,26	0,91	0,99	0,99
10	280	308,41	90,79				302,63	0,91	0,98	0,99
11	384	312,51	122,88				310,85	1,23	0,99	0,98
12	284	316,60	89,70				309,82	0,90	0,98	
78	3 529	3 529,00	1 199,97	399,99	400,00					
							a0=	267,469697		
							a1=	4,09440559		

x	y				
1	250	-5,5	-44,0833333	242,458333	30,25
2	260	-4,5	-34,0833333	153,375	20,25
3	351	-3,5	56,9166667	-199,208333	12,25
4	265	-2,5	-29,0833333	72,7083333	6,25
5	269	-1,5	-25,0833333	37,625	2,25
6	270	-0,5	-24,0833333	12,0416667	0,25

7	362	0,5	67,9166667	33,9583333	0,25
8	276	1,5	-18,0833333	-27,125	2,25
9	278	2,5	-16,0833333	-40,2083333	6,25
10	280	3,5	-14,0833333	-49,2916667	12,25
11	384	4,5	89,9166667	404,625	20,25
12	284	5,5	-10,0833333	-55,4583333	30,25
78	3529			585,5	143

6,5 294,083

التمرين الخامس:

سجلت مبيعات الأدوات المدرسية Y_t لإحدى الشركات خلال 3 سنوات من 2013-2015 وبالنسبة لكل ثلاثي كما يلي:

الثلاثي	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4
المبيعات	250	260	351	265	269	270	362	276	278	280	384	284

1- إيجاد معادلة خط الاتجاه العام. اذا علمت أن: $\sum_{t=1}^{n}(x_t-\bar{x})(y_t-\bar{y})=585{,}5$ وأن:

$$\sum_{t=1}^{n}(x_t-\bar{x})^2=143$$

الحل:

$$\hat{a}_1=\frac{\sum_{t=1}^{n}(X_t-\bar{X})(Y_t-\bar{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t-\bar{X})^2} \Longrightarrow \hat{a}_1=\frac{585{,}5}{143} \Longrightarrow \hat{a}_1=4{,}094$$

$$\hat{a}_0=\bar{Y}-\hat{a}_1\bar{X} \Rightarrow \hat{a}_0=267{,}47$$

معادلة خط الاتجاه العام $\hat{Y}_t=267{,}47+4{,}094X$

التمرين السادس:

سجلت مبيعات Y_t لإحدى الشركات خلال سنتين من 2012-2013 وبالنسبة لكل ثلاثي كما يلي:

الثلاثي	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4
المبيعات	164	198	85	179	168	201	98	197

1- رسم سلسلة المبيعات مع التعليق.
2- استنتاج النموذج الملائم لإيجاد معادلة الاتجاه العام من خلال الرسم.
3- إيجاد معادلة خط الاتجاه العام.
4- حساب الدليل الموسمي لكل فصل.
5- استبعاد أثر التغيرات الموسمية.
6- التنبؤ بالمبيعات في الفصل الثاني لسنة 2015.

الحل:

x	y				
1	164	2,75	-3,5	-9,625	12,25
2	198	36,75	-2,5	-91,875	6,25
3	85	-76,25	-1,5	114,375	2,25
4	179	17,75	-0,5	-8,875	0,25
5	168	6,75	0,5	3,375	0,25
6	201	39,75	1,5	59,625	2,25
7	98	-63,25	2,5	-158,125	6,25
8	197	35,75	3,5	125,125	12,25
36	1290			34	42
4,5	161,25				

a_1=0,80952381

x	y	$\hat{Y}$	q	المتوسط m	الدليل الموسمي s	التغير	إزالة أثر الموسم
1	164	158,417	103,524	103,725	103,724	-3,724	158,111
2	198	159,226	124,351	124,035	124,035	-24,035	159,633
3	85	160,036	53,113	56,568	56,567	43,433	150,264
4	179	160,845	111,287	115,674	115,674	-15,674	154,746
5	168	161,655	103,925				161,968
6	201	162,464	123,719				162,051
7	98	163,274	60,022				173,245
8	197	164,083	120,061				170,307
36	1290			400,002			
4,5	161,25						

a_1	a_0
0,810	157,607

التنبؤ لسنة 2015:

13		168,131	174,393
14		168,940	209,545
15		169,750	96,023
16		170,560	197,292

المراجع:

1. "Économétrie : cours et exercices corrigés, 11 ed" Régis Bourbonnais, Dunod, 2021
2. "Econometric Analysis" William H. Greene
3. "Introductory Econometrics: A Modern Approach" Jeffrey M. Wooldridge
4. "Econometric Theory and Methods" Russell Davidson و James G. MacKinnon
5. "Econometrics" Fumio Hayashi
6. "Microeconometrics: Methods and Applications" A. Colin Cameron و Pravin K. Trivedi
7. "Econometric Models, Techniques, and Applications" Michael D. Intriligator
8. "Econometrics: A Modern Introduction" Michael P. Murray
9. "Econometrics by Example" Damodar N. Gujarati
10. "Applied Econometrics: A Modern Approach Using EViews and Microfit" Dimitrios Asteriou و Stephen G. Hall
11. "Econometric Methods" Jack Johnston و John DiNardo
12. "Econometrics: Statistical Foundations and Applications" Paul A. Ruud
13. "Econometrics: Theory and Applications with EViews" Graeme Chamberlin و Alan S. Heston
14. "Econometrics: Methods and Applications" Orley Ashenfelter و Phillip B. Levine
15. "Econometrics: Alchemy or Science?" David F. Hendry
16. "Econometric Analysis of Financial and Economic Time Series" Thomas J. Sargent و Lars Peter Hansen
17. "Econometric Analysis of Count Data" Rainer Winkelmann و Stefan Boes
18. "Econometric Analysis of Financial Markets" John Y. Campbell و Andrew W. Lo و A. Craig MacKinlay
19. محاضرات في الاقتصاد القياسي د.نورة عبد الرحمن اليوسف جامعة الملك سعود

AUTHOR’ SHORT BIOGRAPHY

Dr. Abdelaziz Refafa

الأستاذ رفافة عبد العزيز، متحصل على شهادة دكتوراه في العلوم التجارية تخصص الطرق الكمية المطبقة في التسيير، بعد مناقشة الأطروحة بعنوان(: دراسة نموذج شبكات بتدفقات متعددة السلع باستخدام طريقة توليد الأعمدة).
قبل ذلك تمت مناقشة رسالة الماجستير بعنوان: (Analyse des données CRM avec le Data Mining).
حيث نوقشت أيضا مذكرة الليسانس بعنوان: (Evaluation de projet d'investissement dans l’univers du risque et de l'incertitude en utilisant la simulation de Monte Carlo et L'Analyse de Sensibilite).

E-mail: abdelaziz.refafa@univ-relizane.dz
ORCID iD: https://orcid..
Google Scholar ; https:// Abdellaziz Refafa - Google Scholar